ГРАВИТАЦИЯ Том 1 Выпуск 1 1995
Дискуссионный журнал по проблемам гравитационной физики .... *page 13–26*

ЭНЕРГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ И ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГРАВИДИНАМИКЕ

Ю.В. Барышев

Продолжается дискуссия, начатая в статье С.Н. Соколова, об энергии гравитационного поля. Показано, что релятивистские понятия энергии поля и энергии взаимодействия могут быть введены естественным образом в негеометризованной теории гравитационного поля. При этом энергия гравитационного поля как статического, так и переменного во времени всегда положительна, а энергия взаимодействия гравитационного поля с любым видом материи всегда отрицательна. В релятивистской теории гравитации классической потенциальной энергии соответствует сумма энергии поля и энергии взаимодействия. Поскольку энергия взаимодействия отрицательна и по абсолютной величине в два раза больше энергии поля, то результирующий знак этой суммы отрицательный. Плотность энергии гравитационного поля дает вклад равный 16.7 % в смещение перицентра орбиты пробного тела.

Содержание

1. Основные выводы из статьи С.Н. Соколова.

В работе С.Н. Соколова [12] проведен поучительный анализ той ситуации, которая сложилась на сегодня вокруг понятия энергии поля в теории гравитации. Кратко основные выводы [12] сводятся к следующему:

— геометрические теории гравитации (такие как общая теория относительности (ОТО)) не содержат понятий, которые позволили бы говорить в рамках этих теорий о плотности энергии гравитационного поля (псевдотензоры для этого не подходят);

— теории с эффективным римановым пространством и с геометризованным лагранжианом материи, в наиболее изученном варианте релятивистской теории гравитации (РТГ) с безмассовым гравитоном, в случае статического поля дают отрицательный знак плотности энергии гравитационного поля $(-7(\nabla\varphi_N)^2/8\pi\, G)$, кстати, также как и в ОТО на произвольном фоне с ТЭИ Грищука–Петрова–Поповой [4] $(-11(\nabla\varphi_N)^2/8\pi\, G)$, что находится в противоречии с положительной плотностью энергии электромагнитного поля как в случае статических, так и нестатических полей;

— и, наконец, можно получить положительную плотность энергии гравитационного поля, если массы покоя частиц будут уменьшаться в результате гравитационного взаимодействия, «тогда не будет проблем с самоусилением гравитационных волн и, возможно, не будет коллапса» [12].

В настоящей работе я постараюсь показать, что именно такой ответ — положительная плотность энергии гравитационного поля и отрицательная плотность энергии взаимодействия, дает негеометрическая, чисто полевая, релятивистская теория гравитационного поля — гравидинамика. При этом все классические релятивистские эффекты гравитации имеют ту же величину, что и в геометрических теориях, однако, плотность энергии статического гравитационного поля становится величиной измеримой экспериментально (16.7 % вклада в смещение перицентра).

Некоторые моменты в анализе С.Н.Соколова кажутся спорными и требуют дальнейшего обсуждения.

1) нерелятивистское рассуждение о плотности гравитационной энергии относится к плотности энергии взаимодействия (релятивистский аналог потенциальной энергии), а не к плотности энергии самого гравитационного поля;

2) в разделе «Релятивистская физика» С.Н.Соколов рассмотрел только геометрические и полугеометрические теории, хотя, вполне очевидно, что понятие плотности энергии гравитационного поля наиболее естественно должно возникать в чисто полевых теориях гравитации;

3) плотность энергии гравитационного поля наблюдается, в отличие от душ умерших людей, т. е. плотность энергии гравитационного поля уже измерена при наблюдениях смещения перигелия Меркурия и периастра двойного пульсара PSR $1913+16$, а также гравитационного излучения от этой двойной системы нейтронных звезд.

Ниже я аргументирую свой взгляд на проблему энергии гравитационного поля, используя только простые вычисления в рамках стандартной релятивистской теории поля. Подчеркну еще раз, для того чтобы разобраться с энергией гравитационного поля, надо, хотя бы на время, отказаться от геометрической трактовки гравитации и попытаться описать гравитацию обычным способом, как физическое поле в пространстве-времени, а не как само пространство-время. Именно в этом случае мы вправе рассчитывать на аналогию с такой релятивистской теорией как электродинамика.

2. Является ли энергия электромагнитного поля положительной?

Прежде чем обсуждать понятие энергии поля в теории гравитации, мне хотелось бы напомнить, как решается этот вопрос в теории электромагнитного поля. Электродинамика (ЭД) — это релятивистская теория векторного поля A^i в пространстве-времени Минковского η^{ik}, которая строится на основе лагранжева формализма.

2.1. Уравнения движения и ТЭИ электромагнитного поля. Действие S для системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, состоит из трех частей [6]:

$$S = S_{(em)} + S_{(int)} + S_{(p)} = \frac{1}{c}\int \Lambda d\Omega \tag{1}$$

где $S_{(em)}$ есть действие для поля в отсутствие зарядов, $S_{(int)}$ есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем, $S_{(p)}$ есть действие для свободных частиц, Λ — лагранжиан системы. Размерность каждого члена в (1) есть:

$$[\text{плотность энергии}] \times [\text{объем}] \times [\text{время}]\,,$$

так что каждому члену будет отвечать своя плотность энергии и соответственно свой тензор энергии импульса (ТЭИ).

Варьируя в действии (1) потенциалы поля при фиксированных источниках, получаем уравнения электромагнитного поля:

$$\Box A^i = -\frac{4\pi}{c}J^i, \tag{2}$$

а варьируя траектории частиц — уравнения движения частиц

$$m_0 c\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k, \tag{3}$$

где $A^i = (\varphi_e, \mathbf{A})$ — 4-потенциал электромагнитного поля в лоренцевой калибровке, т. е. $A^k{}_{,k} = 0$; $j^i = (c\rho_e, \mathbf{v}\rho_e)$ — 4-ток, ρ_e — плотность электрического заряда, $F^{ik} = A^{k,i} - A^{i,k}$ — тензор электромагнитного поля, $u^i = (\gamma, \gamma\mathbf{v}/c)$ — 4-скорость заряда.

Уравнения поля (2) позволяют по заданному распределению и движению зарядов j^i найти 4-потенциал электромагнитного поля A^i, и, в частности, решить задачу об излучении электромагнитных волн. Уравнения движения (3) пробного заряда в заданном электромагнитном поле A^i описывают траектории заряженных частиц на фоне евклидова пространства. Пространственные компоненты уравнения (3) ($i = \alpha$) задают поле силы Лоренца, концептуально эквивалентной ньютоновской силе гравитации. Временная компонента (3) ($i = 0$) описывает работу силы Лоренца по перемещению зарядов в пространстве.

Наличие плоского фонового пространства-времени в электродинамике позволяет оперировать такими релятивистскими понятиями как силовое поле, потенциал, работа силы поля, а также энергия и плотность энергии поля, локализация энергии свободного поля при воздействии его на детектор. В электродинамике, поле обладает массой, энергией, импульсом и может существовать в виде свободных волн, распространяющихся со скоростью света «c». С этой новой фундаментальной постоянной связан параметр малости v/c, по которому осуществляется переход в классическую область «медленных» движений зарядов.

Все вопросы, связанные с энергией электромагнитного поля решаются с помощью тензора энергии импульса (ТЭИ) этого поля, который получается из соответствующего лагранжиана поля с помощью стандартной процедуры. ТЭИ электромагнитного поля имеет вид:

$$T^{ik}_{(em)} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^{k}{}_{l} + \frac{1}{4}\,\eta^{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{4}$$

Отметим следующие замечательные свойства ТЭИ (4):

1) симметричность $T^{ik} = T^{ki}$;

2) положительная плотность энергии $T^{00} \geq 0$;

3) равенство нулю следа $T^i_i = 0$.

Весьма поучительно, что плотность энергии электромагнитного поля $T^{00} = (E^2 + B^2)/8\pi$ является положительной величиной (кстати, так же как и энергия поля, поскольку объем — величина положительная) как для переменного во времени, так и для статического полей. Тем самым подчеркивается, что в релятивистской теории нет принципиальной разницы между статическими и переменными во времени полями.

2.2. Энергия статического поля. Рассмотрим случай электростатического поля более подробно. Уравнение поля (2) в этом случае принимает вид

$$\Delta\varphi_e = -4\pi\rho_e. \tag{5}$$

Для одного точечного заряда $\rho_e = e\delta(\mathbf{R})$, и решение (5) будет иметь вид

$$\varphi_e = \frac{e}{R}, \tag{6}$$

где $R = |\mathbf{R}|$ — расстояние от заряда до точки поля. В этом случае положительно определенной величиной является плотность энергии статического электрического поля вокруг покоящегося заряда

$$\varepsilon_{(em)} = T^{00}_{(em)} = +\frac{1}{8\pi}(\nabla\varphi_e)^2 = +\frac{e^2}{8\pi R^4} \quad \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}\right). \tag{7}$$

Энергия электростатического поля, заключенная в шаровом слое от радиуса $R = a$ до радиуса $R = \infty$, будет

$$E_{em} = \int_a^\infty \varepsilon_e 4\pi r^2\, dr = +\frac{e^2}{2a} \quad (\text{эрг}). \tag{8}$$

Для $a \to 0$ энергия, содержащаяся в поле вокруг заряда, становится бесконечной, что означает внутреннюю противоречивость ЭД. В этом смысле ЭД не является абсолютно строгой математически и имеет вполне определенные физические, а не математические, границы применимости. Соответствующая граница находится из условия, чтобы энергия поля (8) не превышала энергии, эквивалентной массе покоя электрона (если речь идет об элементарном заряде), т. о.

$$E_{(em)} \le m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad 2a \ge \frac{e^2}{m_e c^2}. \tag{9}$$

Последнее означает, что ЭД применима только на расстояниях от заряда, превышающих классический радиус электрона $R_e = 2a$.

Энергию электростатического поля системы зарядов, с учетом уравнения Пуассона (5), можно выразить также в виде:

$$E_{(em)} = \int \varepsilon_{(em)} dV = \frac{1}{2}\int \rho_e\varphi_e\, dV. \tag{10}$$

Из положительности левой части (10) следует положительность правой части, т. е. ρ и φ должны иметь одинаковые знаки.

2.3. Энергия взаимодействия зарядов с электромагнитным полем. Рассмотрим теперь часть действия (1), описывающую взаимодействие между зарядами и полем, т. е. $S_{(int)}$. Ей соответствует ТЭИ взаимодействия [7]:

$$T^{ik}_{(int)} = \frac{1}{c} j^i A^k. \tag{11}$$

В простейшем случае двух покоящихся зарядов, расположенных на расстоянии R друг от друга, 00-компонента ТЭИ (11) имеет вид

$$T^{\propto}_{(int)} = \rho_{e2}\varphi_{e1} + \rho_{e1}\varphi_{e2} + e_1 e_2 \frac{\delta(\mathbf{R}_1) + \delta(\mathbf{R}_2)}{R_{12}}, \tag{12}$$

так что для двух элементарных зарядов будем иметь

$$\varepsilon_{(int)} + T^{00}_{(int)} = \begin{cases} +e^2\left(\delta\left(\mathbf{R}_1\right) + \delta\left(\mathbf{R}_2\right)\right)/R_{12}, & \text{при} \quad \operatorname{sign} e_1 = \operatorname{sign} e_2; \\ -e^2\left(\delta\left(\mathbf{R}_1\right) + \delta\left(\mathbf{R}_2\right)\right)/R_{12}, & \text{при} \quad \operatorname{sign} e_1 \neq \operatorname{sign} e_2. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом плотность энергии взаимодействия отрицательна, если заряды имеют разные знаки, и положительна, если знаки зарядов одинаковы. Соответствующая энергия взаимодействия есть интеграл от 00-компоненты ТЭИ взаимодействия по всему пространству:

$$E_{(int)} = \frac{2e_1e_2}{R_{12}} = \begin{cases} +2e^2/R, & \text{при} \quad \operatorname{sign} e_1 = \operatorname{sign} e_2; \\ -2e^2/R, & \text{при} \quad \operatorname{sign} e_1 \neq \operatorname{sign} e_2 \end{cases} \tag{14}$$

и также знакопеременна в зависимости от знаков взаимодействующих зарядов.

Сравнение выражений (7), (8), (10) и (13), (14) показывает, что в ЭД энергия поля всегда положительная величина, а энергия взаимодействия отрицательна для силы притяжения между двумя зарядами разных знаков и положительна для силы отталкивания между двумя зарядами одинаковых знаков.

При переходе в классическую (нерелятивистскую) физику понятия энергии поля и энергии взаимодействия вырождаются в понятие потенциальной энергии силового поля. Потенциальная энергия имеет отрицательный знак для сил притяжения (ньютоновское притяжение масс и кулоновское притяжение разноименных зарядов) и положительный знак для сил отталкивания. Физически это соответствует тому, что на преодоление сил притяжения необходимо затрачивать работу, а силы отталкивания производят работу по разрушению системы сами.

Классическая потенциальная энергия системы, состоящей из двух разноименных зарядов, есть сумма энергии взаимодействия и энергии поля:

$$E_{(pot)} = -\frac{e^2}{R} = E_{(int)} + E_{(em)}. \tag{15}$$

Знак минус соответствует тому, что система находится в связанном состоянии. Для двух одинаковых зарядов получим

$$E_{(pot)} = +\frac{e^2}{R} = E_{(int)} - E_{(em)}. \tag{16}$$

Таким образом, анализ задач классической физики не может дать ответа на вопрос о знаке энергии поля, он дает ответ только на вопрос о знаке потенциальной энергии системы или о характере классических сил — притяжение или отталкивание. Именно поэтому нерелятивистское рассуждение о плотности энергии в статье [12] ничего не говорит о плотности энергии поля, а полностью относится к потенциальной энергии и работе сил притяжения (пример с пылевидной массивной сферой естественно дает знак минус) и сил отталкивания (пример с заряженной сферой, состоящей из «любых», но одинаковых зарядов, естественно дает знак плюс).

Отсюда ясно, что и в теории гравитационного поля исходным должно быть определение энергии поля через ТЭИ гравитационного поля.

3. Постньютоновская гравидинамика.

Для того чтобы разобраться с энергией гравитационного поля, будем использовать чисто полевое описание гравитации как симметричного тензорного поля ψ^{jk} в пространстве Минковского η^{jk}. По аналогии с электродинамикой (ЭД) будем называть такую теорию гравидинамикой (ГД). Идея такого подхода к гравитации восходит к Анри Пуанкаре, а отдельные попытки построения тензорной теории в плоском пространстве были предприняты в работах Биркгофа, Фиртца и Паули, Мошинского, Тирринга, Калмана, Вейнберга...

Повидимому, объяснением того факта, что ГД до сих пор не использовалась для анализа проблемы энергии гравитационного поля, можно считать широко распространенное утверждение о полной сводимости путем итераций ГД к ОТО и, следовательно, о невозможности в рамках ГД получения результатов, отличных от ОТО. Ниже, на примере проблемы энергии гравитационного поля, будет показано, что ГД заслуживает более детального изучения. В постньютоновской ГД все реально проверяемые релятивистские эффекты гравитации в слабом поле имеют ту же величину, что и в ОТО, однако при этом энергия гравитационного поля имеет обычный физический смысл и может быть измерена экспериментально. Попутно отметим, что в известных доказательствах сходимости итераций ГД к ОТО (см. Мизнер, Торн, Уилер [8] гл. 7 и гл. 18) не учитывается неоднозначность в определении ТЭИ гравитационного поля. В частности, если плотность энергии гравитационного поля положительна, то ГД будет существенно отличаться от ОТО.

Будем рассматривать случай слабого гравитационного поля, т. е. $\varphi/c^2 \ll 1$ (постньютоновская ГД). Физическим основанием теории такого слабого гравитационного поля можно считать то, что все реальные гравитационные поля в релятивистской небесной механике и релятивистской астрофизике являются слабыми. В связи с этим принципиально важно провести тщательный анализ постньютоновской ГД, не ограничивая себя заранее рамками любой наперед заданной точной теории гравитации. Условие слабости гравитационного поля позволяет провести тесную аналогию с электромагнитным полем и разобраться с проблемой энергии гравитационного поля.

И так, пусть гравитационное поле описывается симметричным тензором ψ^{jk} в плоском пространстве η^{jk}, и пусть это поле будет слабым (все компоненты $\ll c^2$). Тогда, аналогично случаю векторного поля A^i, т. е. ЭД, можно воспользоваться стандартным лагранжевым формализмом релятивистской теории поля для построения теории гравитации.

3.1. Уравнения движения и ТЭИ гравитационного поля. Действие S для системы, состоящей из гравитационного поля вместе с находящимися в нем частицами, будет состоять из трех частей:

$$S = S_{(g)} + S_{(int)} + S_{(p)} = \frac{1}{c}\int \Lambda \, d\Omega, \tag{17}$$

где $S_{(g)}$ есть действие для поля в отсутствие источников, $S_{(int)}$ есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между полем и всеми видами материи, включая само гравитационное поле, $S_{(p)}$ есть действие для свободных частиц, Λ — лагранжиан системы.

Лагранжианы тензорного поля, взаимодействия и свободных частиц выбираем в виде ([16], [15], [5], [11]):

$$\Lambda_{(g)} = -\frac{1}{16\pi G}\left[2\psi_{nm}{}^{,n}\psi^{lm}{}_{,l} - \psi_{lm,n}\psi^{lm,n} - 2\psi_{ln}{}^{,l}\psi^{,n} + \psi_{,l}\psi^{,l}\right], \tag{18}$$

$$\Lambda_{(int)} = -\frac{1}{c^2}\,\psi_{lm}T^{lm}_{(\Sigma)}, \tag{19}$$

$$\Lambda_{(p)} = -\eta_{ik}T^{ik}_{(p)} \tag{20}$$

Полный ТЭИ системы частиц и гравитационного поля есть сумма трех членов — ТЭИ частиц, ТЭИ взаимодействия, и ТЭИ гравитационного поля [15], [5], [1]:

$$T^{ik}_{(\Sigma)} = T^{ik}_{(p)} + T^{ik}_{(int)} + T^{ik}_{(g)}, \tag{21}$$

где, канонический ТЭИ гравитационного поля для лагранжиана (18) имеет вид

$$T^{ik}_{(g)} = \frac{1}{8\pi G}\left\{\left(\psi^{lm,i}\psi_{lm}{}^{,k} - \frac{1}{2}\,\eta^{ik}\psi_{lm,n}\psi^{lm,n}\right) - \frac{1}{2}\,\left(\psi^{,i}\psi^{,k} - \frac{1}{2}\eta^{ik}\psi_{,l}\psi^{,l}\right)\right\}. \tag{22}$$

ТЭИ взаимодействия точечных частиц с гравитационным полем дается выражением [5]

$$T^{ik}_{(int)} = \frac{2}{c^2}\,T_{(p)l}{}^{i}\psi^{lk} - \frac{1}{c^2}\,T^{ik}_{(p)}\psi_{lm}u^l u^m, \tag{23}$$

ТЭИ точечных частиц имеет вид

$$T^{ik}_{(p)} = \sum_a m_a c^2 \delta(\mathrm{r} - \mathrm{r}_a)\{1 - v_a^2/c^2\}^{1/2} u^i_a u^k_a. \tag{24}$$

В случае релятивистского газа вместо ТЭИ частиц (24) имеем

$$T^{ik}_{(m)} = (\varepsilon + \rho)u^i u^k - \rho\eta^{ik}, \tag{25}$$

где $\varepsilon = (\rho_0 c^2 + e)$ — полная плотность энергии газа, e — плотность тепловой энергии, p — давление. Отметим также, что ТЭИ гравитационного поля не определяется однозначно в рамках лагранжева формализма, и в этом заключается самая большая трудность ГД, поскольку ТЭИ гравитационного поля должен выступать в качестве источника в уравнениях гравитационного поля. Другие возможности определения ТЭИ гравитационного поля обсуждаются в работе [10].

Условие слабости гравитационного поля позволяет строить теорию последовательными приближениями. Действительно, в первом приближении полный ТЭИ системы (21) сводится к ТЭИ частиц, в виде

$$T^{ik}_{(p)} = \rho_0 c^2\,\mathrm{diag}(1,\,0,\,0,\,0), \tag{26}$$

где ρ_0 есть плотность массы покоя частиц, и в этом случае мы получаем линейную ГД.

Варьируя в действии (17) потенциалы поля при фиксированных источниках $T^{ik}_{(\Sigma)}$, получаем следующие уравнения гравитационного поля:

$$-\psi^{ik,l}{}_{l} + \psi^{il,k}{}_{l} + \psi^{kl,i}{}_{l} - \psi^{,ik} - \eta^{ik}\psi^{lm}{}_{,lm} + \eta^{ik}\psi^{,l}_{l} = \frac{8\pi G}{c^2}\,T^{ik}_{(\Sigma)}. \tag{27}$$

Отметим следующие важные свойства уравнения (27):

1) совпадают с линейным приближением уравнений Эйнштейна–Гильберта;

2) калибровочно инвариантны при фиксированных источниках;

3) в калибровке Гильберта-Лоренца $\psi^{ik}{}_{,k} = 1/2\psi^{,i}$ принимают вид

$$\Box\psi^{ik} = \frac{8\pi G}{c^2}\left[T^{ik}_{(\Sigma)} - \frac{1}{2}\,\eta^{ik}T_{(\Sigma)}\right]; \tag{28}$$

4) дивергенция левой части тождественно обращается в нуль, что должно приводить в правой части к закону сохранения источников и уравнениям движения материи в виде

$$T^{ik}_{(\Sigma),k} = 0. \tag{29}$$

Варьируя в (17) траектории частиц (для случая $T = T$), получаем уравнения движения пробных частиц в заданном гравитационном поле [5]:

$$A^i_k \frac{du^k}{ds} = -B^i_{kl} u^k u^l, \tag{30}$$

где

$$A^i_k = \left(1 - \frac{1}{c^2}\psi_{ln} u^l u^n\right)\eta^i_k - \frac{2}{c^2}\psi_{kn} u^n u^i + \frac{2}{c^2}\psi^i_k, \tag{31}$$

$$B^i_{kl} = \frac{2}{c^2}\psi^i_{k,l} - \frac{1}{c^2}\psi_{k,l}{}^i - \frac{1}{c^2}\psi_{kl,n} u^n u^i. \tag{32}$$

Уравнения гравитационного поля (28) позволяют по заданному распределению и движению источников найти тензорный потенциал гравитационного поля ψ^{ik} и, в частности, решить задачу об излучении гравитационных волн. Уравнения движения (30) пробных частиц в заданном гравитационном поле ψ^{ik} описывают траектории заряженных частиц на фоне евклидова пространства. Отметим, что уравнения (30) не содержат массы покоя пробных частиц, что означает автоматическое выполнение закона равенства инертной и гравитационной масс для любых масс покоя независимо от структуры частиц.

Пространственные компоненты ($i = a$) уравнения (30), после умножения на m_0, задают поле релятивистской силы гравитации (силы Пуанкаре), концептуально эквивалентной ньютоновской силе гравитации. Временная компонента (30) ($i = 0$) описывает работу силы Пуанкаре по перемещению пробных масс в пространстве.

Плоское фоновое пространство-время в гравидинамике позволяет оперировать такими релятивистскими понятиями как силовое поле, потенциал, работа силы поля, а также энергия и плотность энергии поля, локализация энергии свободного поля при воздействии его на детектор. В гравидинамике, поле обладает массой, энергией, импульсом и может существовать как в виде «шубы» вокруг статических масс, так и в виде свободных волн, распространяющихся со скоростью света c. С этой фундаментальной постоянной связаны параметры малости, по которым осуществляется переход к ньютоновской теории гравитации. Наличие массы-энергии у самого гравитационного поля приводит к нелинейности релятивистской ГД, что существенно усложняет теорию гравитационного поля по сравнению с линейной ЭД. Однако в случае слабого гравитационного поля удается построить самосогласованную постньютоновскую ГД.

3.2. Энергия статического гравитационного поля. Рассмотрим простейший случай статического сферически симметричного распределения вещества с плотностью массы покоя ρ_0 и радиусом R_0. Поскольку в первом приближении ТЭИ системы (21) сводится к ТЭИ вещества (свободные частицы или газ) в виде (25), то из условия (29) равенства нулю 4-дивергенции ТЭИ системы, имеем $\partial\rho_0/\partial t = 0$, что означает статичность источников, а значит и потенциалов. Уравнения гравитационного поля (28) принимают вид:

$$\Delta\psi^{ik} = 4\pi G\rho_0 \,\mathrm{diag}(1,1,1,1). \tag{33}$$

Решение уравнения (33) называется потенциалом Биркгофа [9] и имеет вид

$$\psi^{ik} = \varphi_{\mathrm{N}} \,\mathrm{diag}(1,1,1,1), \tag{34}$$

где $\varphi_{_N}$ — ньютоновский потенциал. В частности, для поля вне источников ($R > R_0$) имеем

$$\varphi_{\mathrm{N}} = -\frac{GM_0}{R}, \tag{35}$$

где $M_0 = \int \rho_0 \, dV$ — масса покоя тела.

Плотность энергии статического гравитационного поля (34) находим из выражения (22) для ТЭИ гравитационного поля:

$$\varepsilon_{(g)} = T^{ao}_{(g)} = +\frac{1}{8\pi G}(\nabla\varphi_{_N})^2 = +\frac{GM_0^2}{8\pi R^4} \quad \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}\right). \tag{36}$$

Энергия статического гравитационного поля, заключенная в шаровом слое от радиуса $R = a$ до радиуса $R = \infty$, будет

$$E_{(g)} = \int_a^\infty \varepsilon_{(g)} 4\pi r^2 \, dr = +\frac{GM_0^2}{2a} \quad (\text{эрг}). \tag{37}$$

Аналогично классическому радиусу электрона в ЭД, в рамках ГД существует ограничение на минимальный радиус физических тел из условия, чтобы энергия гравитационного поля не превышает величины, эквивалентной массе покоя тела:

$$E_{(g)} \le M_0 c^2 \quad \Rightarrow \quad 2a \ge \frac{GM_0}{c^2}. \tag{38}$$

Энергию статического гравитационного поля системы частиц, с учетом уравнения Пуассона (33), можно выразить также в виде:

$$E_{(g)} = \int \varepsilon_{(g)} \, dV = -\frac{1}{2}\int \rho_0 \varphi_{\mathrm{N}} \, dV. \tag{39}$$

Положительное значение правой части (39) следует из положительности значения ρ_0 и отрицательного $\varphi_{_N}$.

3.3. Энергия взаимодействия частиц с гравитационным полем. Плотность энергии взаимодействия находим, подставляя Биркгофовский потенциал (34) в 00-компоненту ТЭИ взаимодействия (23):

$$\varepsilon_{(int)} = T^{oo}_{(int)} = \rho_0 \varphi_{\mathrm{N}} \le 0. \tag{40}$$

Таким образом, в отличие от плотности энергии гравитационного поля, плотность энергии взаимодействия является отрицательно определенной величиной (ньютоновский потенциал отрицателен). Соответствующая энергия взаимодействия есть интеграл от 00-компоненты ТЭИ взаимодействия по всему пространству:

$$E_{(int)} = \int \varepsilon_{(int)} \, dV = \int \rho_0 \varphi_{\mathrm{N}} \, dV. \tag{41}$$

С учетом выражений (40) и (36) полную плотность энергии системы гравитационно взаимодействующих частиц газа согласно (21) можно записать в виде

$$\varepsilon_{(\Sigma)} = T^{\infty}_{(\Sigma)} = \varepsilon_{(m)} + \varepsilon_{(int)} + \varepsilon_{(g)} = \rho_0 c^2 + e + \rho_0 \varphi_{\mathrm{N}} + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\varphi_{\mathrm{N}})^2. \tag{42}$$

Полная энергия системы, определенная как интеграл от (42), будет:

$$E_{(\Sigma)} = \int T^{\infty}_{(\Sigma)} dV = \int \left(\rho_0 c^2 + e + \rho_0 \varphi_{\mathrm{N}} + + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\varphi_{\mathrm{N}})^2\right) dV. \tag{43}$$

С учетом соотношения (39) полную энергию системы можно записать в виде

$$E_{(\Sigma)} = E_0 + E_k + E_p, \tag{44}$$

где E_0 — энергия массы покоя системы

$$E_0 = \int (\rho_0 c^2)\, dV, \tag{45}$$

E_k — кинетическая (тепловая) энергия системы

$$E_k = \int (e)\, dV, \tag{46}$$

E_p — классическая потенциальная энергия системы

$$E_p = E_{(int)} + E_{(g)} = \int (\rho_0 \varphi_{\text{N}} + \frac{1}{8\pi G}\, (\nabla\varphi_{\text{N}})^2)\, dV = \frac{1}{2}\int \rho_0 \varphi_{\text{N}}\, dV. \tag{47}$$

При переходе к ньютоновскому пределу сумма энергии взаимодействия, которая отрицательна, и энергии гравитационного поля, которая положительна, играет роль классической потенциальной энергии, имеющей отрицательный знак, в соответствии с тем, что при рассеивании элементов системы на бесконечность необходимо затратить соответствующую работу для преодоления сил гравитации. Следовательно отрицательный знак ньютоновской энергии, полученный в работе [12], не означает отрицательности энергии гравитационного поля.

3.4. Теорема вириала в ПН гравидинамике. Вопрос об энергии гравитационного поля имеет принципиально важное значение в связи с релятивистской формулировкой теоремы вириала. В случае ЭД теорема вириала рассмотрена в учебнике [6]. Здесь мы рассмотрим случай пост-ньютоновской ГД.

Допустим мы имеем замкнутую стационарную самогравитирующую материальную систему, в которой все характеризующие ее величины меняются в конечных пределах, а гравитационное поле системы исчезает на бесконечности. Закон сохранения энергии-импульса такой системы имеет вид (29). Для $i = a$ это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial T^{\subset\alpha}_{(\Sigma)}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\beta\alpha}_{(\Sigma)}}{\partial x^\beta} \tag{48}$$

Усредняя уравнение (48) по времени и учитывая, что среднее значение производной от любой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю, получаем

$$\frac{\partial \overline{T}^{\beta\alpha}_{(\Sigma)}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{49}$$

Умножая (49) на x^a и интегрируя по всему пространству с учетом теоремы Гаусса, получаем

$$\int \overline{T}_{(\Sigma)\alpha}^{\ \ \alpha} dV = 0. \tag{50}$$

Следовательно, для интеграла от следа рассматриваемой самогравитирующей системы можно написать

$$\int \overline{T}_{(\Sigma)} dV = \int \overline{T}^{00}_{(\Sigma)} dV = E_{(\Sigma)}. \tag{51}$$

Соотношение (51) и является релятивистской теоремой вириала для замкнутых стационарных финитных самогравитирующих систем.

Поскольку для следа ТЭИ системы справедливо соотношение

$$\int T_{(\Sigma)}\, dV = \int T_{(m)}\, dV, \tag{52}$$

то для полной энергии системы можно также записать

$$E_{(\Sigma)} = \int \overline{T}_{(m)}\, dV. \tag{53}$$

Таким образом, для вириализованных самогравитирующих газовых систем будем иметь

$$E_{(\Sigma)} = \int (\overline{\varepsilon - 3p})\, dV, \tag{54}$$

а в случае системы точечных частиц

$$E_{(\Sigma)} = \sum_a m_a c^2 \left\{\overline{1 - v_a^2/c^2}\right\}^{1/2}. \tag{55}$$

Учитывая, что $\rho_0 c^2$ много больше плотности тепловой энергии и давления, а также, что для идеального нерелятивистского одноатомного газа $E_{\rm press} = 2E_{\rm heat}/3$, то выражение (54) можно записать в виде

$$E_{(\Sigma)} = M_0 c^2 + E_{\rm heat} - 3E_{\rm press} = M_0 c^2 - E_{\rm heat}, \tag{56}$$

а выражение (55) в виде

$$E_{(\Sigma)} = M_0 c^2 + E_k, \tag{57}$$

что за вычетом массы покоя системы совпадает с классической теоремой вириала.

4. О наблюдаемости плотности энергии гравитационного поля.

Поскольку энергия гравитационного поля — понятие релятивистское, то ясно, что наблюдательно она может проявляться только в релятивистских эффектах.

В работе Тирринга [15] впервые было продемонстрировано (правда не без ошибок), что плотность энергии гравитационного поля непосредственно влияет на величину смещения перицентра эллиптической орбиты пробного тела. Вклад плотности энергии гравитационного поля в смещение перицентра составляет около 17 % от полного релятивистского эффекта. В этом смысле можно считать, что пробное тело, находящееся на орбите вокруг массивного тела, «измеряет» величину плотности энергии гравитационного поля распределенного вокруг этого массивного тела.

Плотность энергии гравитационного поля связана с излучением и поглощением гравитационных волн. Наблюдения пульсара PSR 1913 + 16, входящего в состав двойной системы нейтронных звезд, убедительно демонстрируют потерю энергии этой двойной системы на гравитационное излучение, что согласуется с положительной плотностью энергии гравитационного поля. Продолжающиеся попытки экспериментаторов зарегистрировать гравитационные волны означают ни что иное, как решимость локализовать энергию гравитационного поля в детекторе, и в этом смысле вопрос об энергии гравитационного поля имеет практический характер.

4.1. Смещение перицентра орбиты пробного тела. Ввиду чрезвычайной важности эффекта релятивистского смещения перицентра орбиты пробного тела для задачи экспериментальной проверки величины плотности энергии гравитационного поля рассмотрим этот эффект подробнее.

Из уравнений движения пробных частиц (30) легко получить постньютоновские трехмерные уравнения движения пробных частиц в потенциале статического сферически симметричного тела. При этом в потенциале Биркгофа введем обозначение

$\Phi = \psi^{00}$ и везде будем сохранять только члены порядка v^2/c^2 и φ/c^2. Тогда для трехмерного ускорения пробной частицы получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 3\,\frac{\varphi_{_N}}{c^2}\right)\nabla\Phi + 4\,\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\cdot\nabla\varphi_{_N}\right) \tag{58}$$

В случае линейной ГД потенциал Биркгофа дается выражением (34), в котором $\Phi = \varphi_{_N}$. Уравнения движения с малыми отклонениями от закона Ньютона подробно изучены в небесной механике. В частности, уравнения (58) приводят к эффекту смещения перицентра орбиты равному (за один оборот)

$$\delta\phi = \frac{7\pi G M_0}{c^2 a(1-e^2)}, \tag{59}$$

где a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет.

Однако в нелинейной ГД само гравитационное поле является источником, что приводит к дополнительному члену в Φ-компоненте, который изменяет величину (59). Действительно, если гравитационное поле обладает плотностью энергии (36), то вне рассматриваемого статического тела мы будем иметь не пустоту, как в ньютоновской теории, а некую «шубу» из гравитационного поля, создающую добавочный гравитационный потенциал. Этот потенциал можно найти, подставляя в уравнение поля (28) в качестве источника соответствующий ТЭИ гравитационного поля. При этом следует иметь в виду, что ТЭИ безмассовых полей должен иметь след равный нулю (аналогично свойству «3» для ТЭИ электромагнитного поля), последнего всегда можно добиться, если воспользоваться свободой в определении ТЭИ, имеющейся в рамках лагранжева формализма. Для случая гравитационного поля это было сделано в работе [11]. С учетом всего сказанного выше, уравнение для добавочного потенциала в Φ-компоненте принимает вид:

$$\Delta\varphi_1 = +\frac{G^2 M^2}{c^2 R^4}. \tag{60}$$

Решение уравнения (60) имеет вид

$$\varphi_1 = +\frac{1}{2c^2}\frac{G^2 M^2}{R^2}. \tag{61}$$

Отметим, что именно в этом месте оказывается принципиальным знак плотности энергии гравитационного поля. Если бы вместо (36) мы имели отрицательную плотность энергии гравитационного поля, то изменился бы знак в уравнении (60) и в решении (61). Покажем, к чему бы это привело.

Полное выражение для Φ-компоненты теперь имеет вид

$$\Phi = \varphi_{_N} + \varphi_1 = \varphi_{_N} + \frac{1}{2c^2}\,\varphi_{_N}\varphi_{_N}, \tag{62}$$

и уравнение движения (58) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\Big(1 + \frac{v^2}{c^2} + 4\,\frac{\varphi_{_N}}{c^2}\Big)\nabla\varphi_{_N} + 4\,\frac{\mathbf{v}}{c}\Big(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\varphi_{_N}\Big). \tag{63}$$

Для уравнения (63) смещение перицентра орбиты пробной частицы дается выражением

$$\delta\phi = \frac{6\pi G M_0}{c^2 a(1-e^2)}, \tag{64}$$

которое на 16.7 % меньше выражения (59), полученного без учета плотности энергии гравитационного поля. Выражение (64) совпадает по величине с предсказанием геометрических теорий, однако в рамках ГД оно содержит также информацию о знаке и величине плотности энергии гравитационного поля. Если бы плотность энергии гравитационного поля имела отрицательный знак, то правая часть уравнения (60) изменила бы свой знак, и добавочный потенциал (61) входил бы в (62) с другим знаком. В этом случае в уравнение движения (63) вместо $4\mathbf{v}/c$ входило бы $2\mathbf{v}/c$ и смещение перигелия Меркурия и периастра двойного пульсара превышало бы наблюдаемую величину на 33.4 %.

Наиболее точные данные по измерению этого релятивистского эффекта относятся к двойной системе нейтронных звезд, одним из компонентов которой является пульсар PSR $1913+16$. Согласно работам [13], [14] смещение периастра орбиты составляет 4.226628(18) (град/год), при этом суммарная масса системы (которая в этом случае входит в (64) вместо M_0) $M = 2.82837(4)\ M_{\odot}$, эксцентриситет $e = 0.6171309(6)$, проекция большой полуоси орбиты пульсара $x = a_1 \sin(i/c) = 2.341759(3)$ (сек), синус угла наклона орбиты $\sin i = 0.73(4)$. Наблюдаемое значение смещения периастра согласуется с теоретическим значением (64) с точностью до 0.0004 %. Отсюда следует вывод, что измеренное значение плотности энергии гравитационного поля совпадает с теоретическим значением (36) с точностью до 0.002 %, а значит с большой достоверностью отвергается отрицательное значение этой величины.

4.2. Излучение энергии в виде гравитационных волн. В этой же двойной системе нейтронных звезд с пульсаром PSR $1913+16$ обнаружен еще один релятивистский эффект гравитации, который прямо связан с энергией гравитационного поля — это вековое уменьшение орбитального периода системы вследствие потери энергии системой на излучение гравитационных волн. Фактически за это открытие Тейлору и Халсу была присуждена Нобелевская премия по физике за 1993 год.

Согласно [13], [14] вековое изменение орбитального периода двойной системы с PSR $1913+16$ составляет $-2.425(10)\cdot 10^{-12}$ (сек/сек), а предсказываемое значение этой величины вследствие потери энергии на квадрупольное гравитационное излучение составляет $-2.402576(69)\cdot 10^{-12}$. Теоретическое значение согласуется с наблюдаемым с точностью до 1 %, что также подтверждает наличие положительной плотности энергии у гравитационного поля.

5. Заключение.

Реальные гравитационные поля доступные эксперименту и астрофизическим наблюдениям являются слабыми, поэтому естественно начать построение релятивистской теории гравитации для случая слабого поля. При этом естественно воспользоваться багажом, накопленным в такой релятивистской теории как электродинамика, то есть начать с построения чисто полевой релятивистской теории гравитации, как теории тензорного поля ψ^{ik} в плоском пространстве Минковского η^{ik}, называемой здесь гравидинамикой.

В настоящей работе показано, что на этом пути удается полностью решить «проблему энергии» гравитационного поля, в том смысле, что гравитационное поле безусловно обладает положительной плотностью энергии как в случае статических так и нестатических полей.

Отрицательно определенной энергетической характеристикой системы, состоящей из самогравитирующей материи, является ТЭИ взаимодействия этой материи с гравитационным полем. Резервуаром для энергии поля является энергия массы покоя вещества и ТЭИ взаимодействия учитывает это обстоятельство, входя в законы сохранения полного ТЭИ системы. В ньютоновском пределе энергия гравитационного поля и энергия взаимодействия вырождаются в классическую потенциальную энергию системы, которая является отрицательной величиной и ничего не говорит о знаке энергии самого гравитационного поля.

Плотность энергии статического гравитационного поля является положительной величиной и задается выражением (36). В рамках гравидинамики это выражение уже проверено экспериментально с точностью до тысячных долей процента в результате наблюдения эффекта смещения периастра орбиты двойной системы нейтронных звезд с пульсаром PSR $1913 + 16$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барышев Ю.В., Соколов В.В.* Релятивистская тензорная теория гравитационного поля в плоском пространстве-времени, Труды Астрономической обсерватории ЛГУ (*1983*), Т. 38, С. 36–61.
2. *Birkhoff G.D. [Биркгоф Г.]* Flat space-time and gravitation, Proceed. Nat.Acad.Sci. (*1944*), V. 30, № 10, P. 324–334.
3. *Weinberg S. [Вейнберг С.]* Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations, Physical Rev. (*1965*), v. 138, № 4B, P. 988–1002.
4. *Grishuk L.P., Petrov A.N., Popova A.D. [Грищук Л.П., Петров А.Н., Попова А.Д.]* Exact theory of the (Einstein) gravitational field in an arbitrary background space-time, Commun. Math. Phys. (*1984*), V. 94, P. 379–396.
5. *Kalman G. [Калман Г.]* Lagrangian formalism in relativistic dynamics, Physical Rev. (*1961*), V. 123, P. 384–390.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля, М.: Наука, *1973*.
7. *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики, М.: Наука, *1977*.
8. *Misner C., Thorn K., Wheeler J. [Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.]* Gravitation, W.H. Freeman, San Francisco, *1973*.
9. *Moshinsky M. [Мошинский М.]* On the interactions of Birkhoff's gravitational field with the electromagnetic and pair fields, Physical Rev. (*1950*), V. 80, P. 514–519.
10. *Ощепков С.А.* Энергия статического сферически-симметричного поля в гравидинамике, Гравитация (*1995*), Т. 1, Вып. 1 (в этом выпуске).
11. *Соколов В.В., Барышев Ю.В.* Теоретико-полевой подход к гравитации. Тензор энергии-импульса поля, Гравитация и теория относительности (*1980*), Казанский гос. унив., Вып. 17, С. 34–42.
12. *Соколов С.Н.* Является ли плотность энергии гравитационного поля положительной?, Гравитация (*1994*), Т. 1, Вып. 1, (в этом выпуске).
13. *Taylor J., Weisberg J. [Тейлор Дж. и Вейсберг Дж.]* Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16, Astrophys. J. (*1989*), V. 345, P. 434–450
14. *Taylor J.H. et al. [Тейлор Дж. и др.]* Experimental constraints on strong-field relativistic gravity, Nature (*1992*), V. 355, P. 132–136.
15. *Thirring W.E. [Тирринг В.]* An alternative approach to the theory of gravitation, Ann.of Phys. (*1961*), V. 16, P. 96–117.
16. *Fierz M., Pauli W. [Фирц М. и Паули В.]* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, Proc. Roy. Soc. (*1939*), V. 173A, № 953, P. 211–232.