ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 1 1996
Дискуссионный журнал по проблемам гравитационной физики .... page 5–24

АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

ДВЕ СВЯЗНОСТИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Н.А. Черников

Объединенный Институт Ядерных Исследований, Дубна, Россия

Содержание

Введение

Рассматривая в общей теории относительности (ОТО) переход к нерелятивистскому пределу [1], я убедился в том, что в теорию тяготения Эйнштейна наряду с полевой связностью Γ_{mn}^{a} необходимо ввести еще и фоновую связность $\check{\Gamma}_{mn}^{a}$. Мне никогда не казалось обоснованным утверждение, что в таком пределе в видимом нами мире должна появиться непременно геометрия Евклида. В самом деле, почему бы вместо евклидовой не появиться в нем геометрии Лобачевского [2]? Оказывается, такая возможность реализуется, если должным образом выбрать фоновую связность. Правда, так выбранная связность выводит за пределы теории Эйнштейна. Но фоновая связность за пределы теории Эйнштейна нас не выводит и дает нам возможность решить проблему энергии без вывода о ее нелокализуемости. Нелепый вывод этот — о нелокализуемости энергии — результат неправомерного применения интегральной теоремы Гаусса к псевдотензорному полю (а не к тензорному, как это требуется по условию теоремы).

Введя фоновую связность, придав теории тяготения вполне тензорный характер и упразднив вывод о нелокализуемости энергии, дискуссию о псевдотензоре энергии мы можем считать завершенной.

В теории тяготения с двумя аффинными связностями теория Эйнштейна выступает в виде частного случая, когда фоновая связность примитивна [3]. Другой случай, в котором фоновая связность задается геометрией Лобачевского, рассмотрен в [4]–[6].

Обзор результатов на данную тему начинаю с конспекта теории аффинной связности, составленного мною по книге [7].

Аффинные связности и тензорные поля

Аффинные связности рассматриваем на N-мерном многообразии и относим их к базису $d^a = dx^a$ и дуальному базису $\partial_a = \partial/\partial x^a$, где x^a — координаты, составляющие карту x многообразия. Точно так поступаем и с тензорными полями.

Тензорное поле T типа (A/B) задается своими компонентами с верхними индексами $a_1, \ldots, a_A$ и нижними индексами $b_1, \ldots, b_B$.

Аффинная связность Γ вводится так, чтобы взятая с ее помощью ковариантная производная ∇T всякого тензорного поля типа (A/B) являлась тензорным полем типа $(A/B+1)$. Она задается своими компонентами $\Gamma_{mn}^{\ \ a}$.

Для ковекторного поля полагают

$$\nabla_m T_n = \partial_m T_n - \Gamma_{mn}^{\ \ a} T_a. \tag{1}$$

Отсюда следует, что при переходе от карты x к карте $\tilde{x}$ компоненты связности преобразуются по правилу

$$\tilde{\Gamma}_{mn}^{\ \ a} = \left(\Gamma_{pq}^{\ \ s} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^n} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^n} \right) \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^s}. \tag{2}$$

В свою очередь, из (2) следует, что для всякого векторного поля комбинации

$$\nabla_m T^a = \partial_m T^a + \Gamma_{mn}^{\ \ a} T^n \tag{3}$$

составляют тензорное поле типа $(1/1)$, которое является ковариантной производной векторного поля.

Ковариантная производная всякого тензорного поля составляеся в соответсвии с правилом дифференцирования произведения: $\nabla(AB) = (\nabla A)B + A(\nabla B)$. В частности для скалярного поля Т ковариантная производная равна частной:

$$\nabla_m T = \partial_m T. \tag{4}$$

Тензор кручения

Как следует из (2), разность

$$S_{mn}^{\ \ a} = \Gamma_{mn}^{\ \ a} - \Gamma_{nm}^{\ \ a} \tag{5}$$

является тензорным полем типа (1/2).

Тензор (5) называют тензором кручения.

Тензор кривизны

Подобно оператору $\nabla_k - \partial_k$, оператор

$$\nabla_{kl} = \nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k + S_{kl}^{\ \ p} \nabla_p \tag{6}$$

в применении к скалярному полю T дает нуль:

$$\nabla_{kl} T = 0. \tag{7}$$

Тот же оператор в применении к ковекторному полю T_n дает

$$\nabla_{kl} T_n = -R^a{}_{kln} T_a, \tag{8}$$

а в применении к векторному полю T^a дает

$$\nabla_{kl} T^a = -R_{kln}^{\ \ a} T^n, \tag{9}$$

где

$$R^a_{kln} = \partial_k \Gamma_{ln}^{\ \ a} - \partial_l \Gamma_{kn}^{\ \ a} + \Gamma_{ks}^{\ \ a} \Gamma_{ln}^{\ \ s} - \Gamma_{ls}^{\ \ a} \Gamma_{kn}^{\ \ s}. \tag{10}$$

Из (8) или из (9) следует, что комбинация (10) является тензором типа (1/3). Его называют тензором кривизны или тензором Римана-Кристоффеля.

Полезно заметить, что если в формуле $(\nabla_k - \partial_k T = \ldots$ для тензорного поля T любого типа (A/B) сочетание букв Γ_k заменить на сочетание букв R_{kl}, то получится формула $\nabla_{kl} T = \ldots$.

Эти сочетания не следует путать с вводимыми ниже свертками.

Две свертки тензора кривизны и свернутая связность

Ввиду антисимметрии

$$R^a_{kln} + R^a_{lkn} = 0 \tag{11}$$

тензора Римана-Кристоффеля представляют интерес только две его свертки. Одна из них,

$$R^a_{aln} = R_{ln}, \tag{12}$$

называеся тензором Риччи. Другая,

$$R^a_{kla} = \Omega_{kl} = \partial_k \Gamma_l - \partial_l \Gamma_k, \tag{13}$$

называется тензором кривизны свернутой связности Γ_m, равной

$$\Gamma_m = \Gamma_{ma}^{\ \ a}. \tag{14}$$

Согласно (5) вторая свертка связности отличается от первой на ковектор кручения $S_n = S_{an}^{\ \ a}$.

Согласно (2) при переходе то одной карты к другой компоненты свернутой связности (14) преобразуются по правилу

$$\tilde{\Gamma}_m = \left(\Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^p} \right) \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}. \tag{15}$$

Последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$\tilde{\Gamma}_m = \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}\left(\Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^p}\ln J\right), \tag{16}$$

где J — якобиан преобразования

$$J = \partial(x^1 \dots x^N)/\partial(\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^N). \tag{17}$$

Доказательство. Дифференциал определителя A любой матрицы (A^p_q) равен $dA = B^q_p\, dA^p_q$, где B^q_p — алгебраическое дополнение элемента A^p_q. Поэтому

$$\frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}\frac{\partial}{\partial x^p}\ln J = \frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial \tilde{x}^m} = \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \tilde{x}^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \tilde{x}^q \partial \tilde{x}^m} = \frac{\partial}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}$$

и формула (16) доказана.

Применим оператор $\nabla - \partial$ к тензору E типа $(0/N)$. Имеем

$$(\nabla_m - \partial_m)E_{k_1\dots k_N} = -\Gamma_{mk_1}{}^{a} E_{ak_2\dots k_N} - \dots - \Gamma_{mk_N}{}^{a} E_{k_1\dots k_{N-1}a}.$$

Если тензор E антисимметричен по любой паре индексов $k_1 \dots k_N$, то комбинация

$$\Gamma_{ma}{}^{b} E_{k_1\dots k_N} - \Gamma_{mk_1}{}^{b} E_{ak_2\dots k_N} - \dots - \Gamma_{mk_N}{}^{b} E_{k_1\dots k_{N-1}a}$$

антисимметрична по любой паре индексов $ak_1 \dots k_N$. Следовательно, эта комбинация равна нулю и

$$\nabla_m E_{k_1\dots k_N} = (\partial_m - \Gamma_m)E_{k_1\dots k_N}. \tag{18}$$

Таким же способом доказывается, что

$$\nabla_{mn} E_{k_1\dots k_N} = -\Omega_{mn} E_{k_1\dots k_N}. \tag{19}$$

Две связности

Пусть теперь на одном и том же многообразии заданы две связности Γ и $\check{\Gamma}$ с компонентами $\Gamma_{mn}{}^{a}$ и $\check{\Gamma}_{mn}{}^{a}$. Как следует из (2), разность

$$P_{mn}{}^{a} = \check{\Gamma}_{mn}{}^{a} - \Gamma_{mn}{}^{a} \tag{20}$$

является тензорным полем типа $(1/2)$.

Тензор (20) называют тензором аффинной деформации.

Подставляя в (10) взятое из (20) выражение для $\check{\Gamma}_{mn}{}^{a}$, получаем закон изменения тензора кривизны при переходе от первой связности ко второй:

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + S_{kl}{}^{m} P_{mn}{}^{a} + \nabla_k P_{ln}{}^{a} - \nabla_l P_{kn}{}^{a} + P_{ks}{}^{a} P_{ln}{}^{s} - P_{ls}{}^{a} P_{kn}{}^{s}. \tag{21}$$

Свертку

$$P_m = \check{\Gamma}_m - \Gamma_m = P_{ma}{}^{a} \tag{22}$$

называют ковектором аффинной деформации. Из (21) получаем закон изменения тензора кривизны свернутой связности

$$\check{\Omega}_{kl} = \Omega_{kl} + \nabla_k P_l - \nabla_l P_k + S_{kl}{}^{m} P_m = \Omega_{kl} + \partial_k P_l - \partial_l P_k. \tag{23}$$

Если поменять местами связности Γ и $\check{\Gamma}$, то согласно (20) тензор аффинной деформации изменит знак:

$$\check{P}_{mn}{}^{a} = -P_{mn}{}^{a}. \tag{24}$$

Согласно же (21) закон изменения тензора при этом примет вид

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + \check{S}_{kl}{}^m P_{mn}{}^a + \check{\nabla}_k P_{ln}{}^a - \check{\nabla}_l P_{kn}{}^a - P_{ks}{}^a P_{ln}^{\ s} + P_{ls}{}^a P_{kn}^{\ s}. \tag{25}$$

Связность без кручения

Если тензор кручения (5) равен нулю, то

$$\Gamma_{mn}{}^a = \Gamma_{nm}{}^a. \tag{26}$$

Такая связность называется симметричной или связностью без кручения. В этом случае наряду с (11) тензор кривизны удовлетворяет еще одному условию алгебраическому

$$R^a_{kln} + R^a_{nkl} + R^a_{lnk} = 0 \tag{27}$$

и одному условию дифференциальному

$$\nabla_i R^a_{kln} + \nabla_l R^a_{ikn} + \nabla_k R^a_{lin} = 0. \tag{28}$$

Последнее называется тождеством Бианки-Падова.

В результате свертки отсюда получаем

$$\Omega_{kl} + R_{kl} - R_{lk} = 0, \tag{29}$$

$$\nabla_i \Omega_{kl} + \nabla_l \Omega_{ik} + \nabla_k \Omega_{li} = 0. \tag{30}$$

Для каждой точки многообразия можно определить такую систему координат, в которой значения всех компонент связности без кручения обращаются в нуль в этой точке.

Эквиаффинная связность

Симметричная связность называется эквиаффинной, если существует антисимметричный по любой паре своих индексов тензор E типа $(0/N)$, ковариантная производная (18) которого равна нулю. В этом случае

$$\Omega_{kl} = 0, \quad R_{kl} = R_{lk}. \tag{31}$$

Пара симметричных связностей

Для симметричных связностей тензор аффинной деформации (20) также симметричен:

$$P_{mn}{}^a = P_{nm}{}^a. \tag{32}$$

Как и в [8], в этом случае разность тензоров кривизны запишем в следующих двух видах:

$$\check{R}^a_{mnb} - R^a_{mnb} = \nabla_m P_{nb}{}^a - \nabla_n P_{mb}{}^a - P^a_{mnb}, \tag{33}$$

$$\check{R}^a_{mnb} - R^a_{mnb} = \check{\nabla}_m P_{nb}{}^a - \check{\nabla}_n P_{mb}{}^a + P^a_{mnb}, \tag{34}$$

где

$$P^a_{mnb} = P_{mb}{}^s P_{sn}{}^a - P_{nb}{}^s P_{sm}{}^a. \tag{35}$$

Тензор (35) удовлетворяет условиям

$$P^s_{mns} = 0, \tag{36}$$

$$P^a_{mnb} + P^a_{nmb} = 0, \tag{37}$$

$$P^a_{mnb} + P^a_{bmn} + P^a_{nbm} = 0, \tag{38}$$

из которых следует симметричность тензора

$$P_{mn} = P^a_{amn} = P_{mb}{}^a P_{an}{}^b - P_s P_{mn}{}^s. \tag{39}$$

В симметричности тензора (39) можно убедиться и непосредственно.

Связность Кристоффеля

Если ковариантная производная невырожденного тензорного поля $g_{mn} = g_{nm}$ равна нулю, то связность $\Gamma_{mn}{}^a$ равна скобке Кристоффеля $\left\{ {a \atop m\ \ n} \right\}$:

$$\Gamma_{mn}{}^a = \left\{ {a \atop m\ \ n} \right\} = \frac{1}{2} g^{as}(\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}), \tag{40}$$

где g^{as} — тензор, обратный тензору g_{sb}, так что

$$g^{as} g_{sb} = \delta^a_b. \tag{41}$$

Из равенства $\nabla_k g_{mn} = 0$ следует равенство $\nabla_k g^{mn} = 0$, так что операция опускания и поднятия тензорных индексов с помощью тензоров g_{mn} и g^{mn} коммутативна с операцией ∇_k ковариантного дифференцирования по связности Кристоффеля (40). Теперь заметим, что связность Кристоффеля симметрична, и что ее свертка равна

$$\Gamma_m = \left\{ {a \atop m\ \ n} \right\} = \frac{1}{2} g^{ab} \partial_m g_{ab} = \frac{1}{2g}\, \partial_m g, \tag{42}$$

где g — определитель матрицы (g_{mn}). Поэтому если в формуле (18) положить

$$E_{1\ldots N} = \sqrt{|g|}, \tag{43}$$

то справа получится нуль. Следовательно, связность Кристоффеля эквиаффинна.

Тензор Эйнштейна

В случае связности Кристоффеля (40) наряду с тензором Риччи (12) рассматривается скаляр кривизны

$$R = g^{mn} R_{mn} \tag{44}$$

и тензор Эйнштейна

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}\, R g_{ab}. \tag{45}$$

Относительно связности Кристоффеля тензор Эйнштейна удовлетворяет условию

$$\nabla_s G_{ab} g^{sb} = 0. \tag{46}$$

Чтобы доказать это, свернем тождества Бианки-Падова (28) с тензором $\delta^k_a g^{in}$ и получим

$$(\nabla_i R^a_{aln} + \nabla_l R^a_{ian} + \nabla_a R^a_{lin}) g^{in} = 0.$$

По определению (12) первое слагаемое в этих скобках дает

$$\nabla_i R^a_{aln} g^{in} = \nabla_i R_{ln} g^{in}.$$

По свойству (11), по определению (12) и по определению (44) второе слагаемое в этих скобках дает

$$\nabla_l R^a_{ian} g^{in} = -\nabla_l R^a_{ain} g^{in} = -\nabla_l R_{in} g^{in} = -\nabla_l R.$$

Забегая вперед, скажем, что третье слагаемое в этих скобках дает то же самое, что и первое:

$$\nabla_a R^a_{lin} g^{in} = \nabla_a R^{ai}_{li} = \nabla_a R^{ia}_{il} = \nabla_a R^i_{iln} g^{na} = \nabla_a R_{ln} g^{na}.$$

Складывая эти результаты, получаем (46), но чтобы доказать третий результат, надо знать те свойства тензора кривизны, о которых речь впереди.

Алгебраические тождества для тензора кривизны в случае связности Кристоффеля

Применив к тензорному полю g^{ab} оператор (6), получим

$$\nabla_{kl} g^{ab} = R^a_{kls} g^{sb} + R^b_{kls} g^{as} = 0.$$

Этот результат удобно записать в компактном виде

$$R^{ab}_{kl} + R^{ba}_{kl} = 0, \tag{47}$$

обозначив

$$R^{ab}_{kl} = R^a_{kls} g^{sb}. \tag{48}$$

Учитывая (11), получаем

$$R^{ab}_{kl} + R^{ab}_{lk} = 0, \tag{49}$$

а следовательно,

$$R^{ab}_{kl} = R^{ba}_{lk}. \tag{50}$$

Этих знаний достаточно, чтобы завершить начатое выше доказательство теоремы (46) о тензоре Эйнштейна.

Результат, эквивалентный (47), можно получить иначе, применив оператор (6) к тензорному полю g_{mn}. Имеем

$$\nabla_{kl} g_{mn} = -R^a_{klm} g_{an} - R^a_{kln} g_{ma} = 0,$$

что удобно записать в компактном виде

$$R_{klmn} + R_{klnm} = 0, \tag{51}$$

обозначив

$$R_{klmn} = -R^a_{klm} g_{an} = R^{ab}_{kl} g_{am} g_{bn}. \tag{52}$$

очевидно, результат (51) эквивалентен результату (47).

Учитывая (11), получаем

$$R_{klmn} + R_{lkmn} = 0, \tag{53}$$

а следовательно,

$$R_{klmn} = R_{lknm}. \tag{54}$$

Результат (53) эквивалентен результату (49), а результат (54) эквивалентен результату (50).

Докажем теперь, что

$$R_{klmn} = R_{mnkl}. \tag{55}$$

Согласно (27) тензор (52) удовлетворяет условию

$$R_{klmn} + R_{mkln} + R_{lmkn} = 0. \tag{56}$$

Сделаем в этом тождестве все циклические перестановки индексов:

$$\begin{aligned} &R_{klmn} + R_{mkln} + R_{lmkn} = 0, \quad R_{mnkl} + R_{kmnl} + R_{nkml} = 0,\\ &R_{nklm} + R_{lnkm} + R_{klnm} = 0, \quad R_{lmnk} + R_{nlmk} + R_{mnlk} = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из верхних равенств нижние, получаем

$$\begin{aligned} R_{klmn} - R_{klnm} &= (R_{nklm} + R_{lnkm}) - (R_{mkln} + R_{lmkn}),\\ R_{mnkl} - R_{mnlk} &= (R_{lmnk} + R_{nlmk}) - (R_{kmnl} + R_{nkml}). \end{aligned}$$

В силу (51) и (54) отсюда следует (55).

Примитивная и полупримитивная связности

Афинную связность называем примитивной, если она симметрична, и ее тензор Римана-Кристоффеля равен нулю. Таким образом, примитивная связность удовлетворяет системе уравнений

$$S_{mn}^{\ \ a} = 0, \quad R^a_{kln} = 0. \tag{57}$$

Связность, удовлетворяющую более слабой системе уравнений

$$S_{mn}^{\ \ a} = 0, \quad R_{mn} + R_{nm} = 0, \tag{58}$$

называем полупримитивной. Вспомним, что удовлетворяющая системе уравнений

$$S_{mn}^{\ \ a} = 0, \quad R_{mn} - R_{nm} = 0 \tag{59}$$

связность называется эквиаффинной.

Координатная связность

Аффинную связность называем координатной, если найдется на многообразии такая карта y, что в любой связанной с ней карте x все компоненты связности равны

$$\Gamma_{mn}^{\ \ a} = \frac{\partial x^a}{\partial y^s}\frac{\partial^2 y^s}{\partial x^m\,\partial x^n}. \tag{60}$$

Точнее, связность (60) называем связностью, задаваемою картой y. Нетрудно проверить, что связность (60) удовлетворяет системе (57). Следовательно, координатная связность примитивна.

Можно доказать, что всякое решение системы (57) представляется в виде координатной связности. Иначе говоря, примитивная связность является координатной. Но координатная связность отнюдь не задает карту y однозачно: если подставить в (60) афинное преобразование

$$y^s = A^s_r z^r + B^s, \tag{61}$$

то решение системы (57) не изменится. Наоборот, если при переходе от карты y к карте z решение системы (58) не меняется, то этот переход оказывается афинным. Таким образом, всякая координатная связность определяет аффинную геометрию.

Метрика, допускаемая координатной связностью

Координатная связность (60) никакой метрики не задает, но допускает ее в виде

$$C_{mn}\,\frac{\partial y^m}{\partial x^a}\frac{\partial y^n}{\partial x^b}\,dx^a dx^b = C_{mn}\,dy^m dy^n, \tag{62}$$

где о матрице (C_{mn}) известно только, что она симметрична, не выроджена и не зависит от координат y.

Нетрудно убедиться, что скобки Кристоффеля для такой метрики равняются (60). Действительно, в данном случае

$$g_{ab} = C_{mn}\,\frac{\partial y^m}{\partial x^a}\frac{\partial y^n}{\partial x^b}, \quad g^{mn} = C^{ab}\,\frac{\partial x^m}{\partial y^a}\frac{\partial x^n}{\partial y^b},$$

где (C^{ab}) — матрица, обратная (C_{mn}). Следовательно,

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ m\ \ n \end{matrix} \right\} = g^{as} C_{pq}\,\frac{\partial y^p}{\partial x^s}\frac{\partial^2 y^q}{\partial x^m\,\partial x^n} =$$
$$= C^{rt}\,\frac{\partial x^a}{\partial y^r}\frac{\partial x^s}{\partial y^t}C_{pq}\,\frac{\partial y^p}{\partial x^s}\frac{\partial^2 y^q}{\partial x^m\,\partial x^n} = C^{rp}\,\frac{\partial x^a}{\partial y^r}C_{pq}\,\frac{\partial^2 y^q}{\partial x^m\,\partial x^n} = \frac{\partial x^a}{\partial x^r}\frac{\partial^2 y^r}{\partial x^m\,\partial x^n}.$$

Заменяя индекс суммирования, получаем (60).

Таким образом, никакой информации о матрице (C_{mn}) связность (60) не содержит.

Пара примитивных связностей

Рассмотрим пару решений Γ и $\check{\Gamma}$ системы уравнений (57): одно из них в виде координатной связности (60), а другое в виде координатной связности

$$\check{\Gamma}_{mn}^{\ a} = \frac{\partial x^a}{\partial z^s}\frac{\partial^2 z^s}{\partial x^m\,\partial x^n}. \tag{63}$$

В данном случае тензор афинной деформации (20) равен

$$P_{mn}^{\ a} = \frac{\partial x^a}{\partial z^s}\frac{\partial y^p}{\partial x^m}\frac{\partial y^q}{\partial x^n}\frac{\partial^2 z^s}{\partial y^p\,\partial y^q}. \tag{64}$$

Действительно, имеем

$$\frac{\partial z^s}{\partial x^n} = \frac{\partial z^s}{\partial y^q}\frac{\partial y^q}{\partial x^n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z^s}{\partial x^m\,\partial x^n} = \frac{\partial z^s}{\partial y^q}\frac{\partial^2 y^q}{\partial x^m\,\partial x^n} + \frac{\partial y^q}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial z^s}{\partial y^q},$$
$$P_{mn}^{\ a} = \frac{\partial x^a}{\partial z^s}\frac{\partial y^q}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial z^s}{\partial y^q}.$$

Из этого равенства непосредсвенно следует (64). В свою очередь, из (64) следует, что неафинный переход от карты y к карте z меняет примитивную связность и дает новое решение системы (57); напротив, афинный переход от y к z этой связности не меняет.

Число существенных компонент тензора кривизны

Посчитаем число C сущесвенных компонент тензора, удовлетворяющего условиям (11) и (27). Очевидно, что $C = NP$, где N — размерность многообразия, P — число существенных компонент тензора P_{kln}, удовлетворяющего условиям

$$P_{kln} + P_{lkn} = 0, \tag{S}$$

$$P_{kln} + P_{nkl} + P_{lnk} = 0. \tag{A}$$

Так как тензор

$$S_{kln} = P_{kln} + P_{lkn}$$

симметричен по первым двум индексам, то число линейно независимых условий типа (S) равно

$$S = N\,\frac{N(N+1)}{2}.$$

Если условия (S) выполняются, то тензор P_{kln} антисимметричен по первым двум индексам, а тензор

$$A_{kln} = P_{kln} + P_{nkl} + P_{lnk}$$

антисимметричен по всякой паре индексов. Следовательно, к числу S добавляется число

$$A = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$$

линейно независимых условий типа (A). Поэтому

$$P = N^3 - N\,\frac{N(N+1)}{2} - \frac{N(N-1)(N-2)}{6} = \frac{N}{3}\,(N^2-1),$$

а следовательно,

$$C = \frac{1}{3}\,N^2(N^2-1). \tag{65}$$

В частности, в двумерном случае $C = 4$. Столько же компонент имеет и тензор Риччи. Поэтому в двумерном случае возможно и на самом деле выполняется (см. [6, с. 291]) равенство

$$R^a_{klm} = \delta^a_k R_{lm} - \delta^a_l R_{km}. \tag{66}$$

В случае связности Кристоффеля, как показано в книге [9] на странице 201, число существенных компонент тензора кривизны (52) равно

$$\frac{C}{4} = \frac{1}{12}\,N^2(N^2-1). \tag{67}$$

В двумерном случае $C/4 = 1$, тензор Эйнштейна (45) равен нулю, а тензор Римана-Кристоффеля равен

$$R_{klmn} = \frac{1}{2}\,R(g_{km}g_{ln} - g_{kn}g_{lm}). \tag{68}$$

В трехмерном случае $C/4 = 6$. Столько же компонент в этом случае имеет и тензор Риччи. Поэтому в трехмерном случае возможно и на самом деле выполняется (см. [10, с. 366]) равенство

$$R_{klmn} = L_{km}g_{ln} - L_{kn}g_{lm} + L_{ln}g_{km} - L_{lm}g_{kn}, \tag{69}$$

где

$$L_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{4}\, R g_{mn}. \tag{70}$$

Следовательно, в трехмерном случае полупримитивная связность, представляемая скобкой Кристоффеля, примитивна.

В силу (47) и (49) тензор R^{ab}_{kl} можно рассматривать как бинейный оператор, действующий в пространстве бивекторов X^{kl}, то есть антисимметричных тензоров типа (2/0). Представляет интерес уравнение

$$\frac{1}{2}\, R^{ab}_{kl} X^{kl} = \lambda X^{ab}$$

на собственные значения этого опратора. Интересны тензоры

$$\lambda(\delta^a_k\delta^b_l - \delta^b_k\delta^a_l) - R^{ab}_{kl}, \quad \lambda(g_{km}g_{ln} - g_{kn}g_{lm}) - R_{klmn},$$

и симметричная билинейная форма $X^{kl}R_{klmn}Y^{mn}$.

Формула Гаусса

Подставив в (52) определение (10), а затем (40) нетрудно получить следующее выражение для тензора Римана-Кристоффеля:

$$R_{klmn} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{kn} g_{lm} + \partial^2_{lm} g_{kn} - \partial^2_{ln} g_{km} - \partial^2_{km} g_{ln}\right) + g_{pq}\left(\Gamma^{\ p}_{kn}\Gamma^{\ q}_{lm} - \Gamma^{\ p}_{ln}\Gamma^{\ q}_{km}\right). \tag{71}$$

В частности при $N = 2$ в обозначениях Гаусса пишем

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G, \quad g = EG - FF. \tag{72}$$

Отсюда находим

$$g^{11} = \frac{G}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{F}{g}, \quad g_{22} = \frac{E}{g}. \tag{73}$$

Затем, обозначая

$$\Gamma_{a,mn} = g_{as}\Gamma^{\ s}_{mn}, \tag{74}$$

находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2}\,\partial_1 E, & \Gamma_{2,11} &= \partial_1 F - \frac{1}{2}\,\partial_2 E, \\ \Gamma_{1,12} &= \frac{1}{2}\,\partial_2 E, & \Gamma_{2,12} &= \frac{1}{2}\,\partial_1 G, \\ \Gamma_{1,22} &= \partial_2 F - \frac{1}{2}\,\partial_1 G, & \Gamma_{2,22} &= \frac{1}{2}\,\partial_2 G. \end{aligned} \tag{75}$$

Воспользовавшись равенством

$$g_{pq}\left(\Gamma^{\ p}_{kn}\Gamma^{\ q}_{lm} - \Gamma^{\ p}_{ln}\Gamma^{\ q}_{km}\right) = g^{pq}\left(\Gamma_{p,kn}\Gamma_{q,lm} - \Gamma_{p,ln}\Gamma_{q,km}\right),$$

согласно (69) получаем

$$R_{1212} = \frac{1}{2}\, Rg = -\frac{1}{2}\,\partial^2_{22} E + \partial^2_{12} F - \frac{1}{2}\,\partial^2_{11} G + g^{pq}\left(\Gamma_{p,12}\Gamma_{q,12} - \Gamma_{p,11}\Gamma_{q,22}\right). \tag{76}$$

В конце преобразаваний находим, что при $N = 2$

$$R_{klmn} = K(g_{km}g_{ln} - g_{kn}g_{lm}), \tag{77}$$

где $K = R/2$ — кривизна, для которой Гаусс [11, с. 139] вывел следующую формулу:

$$4ggK = EX + FY + GZ - 2g\left(\partial^2_{22}E - 2\partial^2_{12}F + \partial^2_{11}G\right),$$

в которой

$$X = 4(\Gamma_{2,12}\Gamma_{2,12} - \Gamma_{2,11}\Gamma_{2,22}) = \partial_2 E\,\partial_2 F - 2\partial_1 F\,\partial_2 G + \partial_1 G\,\partial_1 G,$$
$$Y = 4(\Gamma_{1,11}\Gamma_{2,22} + \Gamma_{2,11}\Gamma_{1,22} - 2\Gamma_{1,12}\Gamma_{2,12}) =$$
$$= \partial_1 E\,\partial_2 G - \partial_2 E\,\partial_1 G - 2\partial_2 E\,\partial_2 F + 4\partial_1 F\,\partial_2 F - 2\partial_1 F\,\partial_2 G,$$
$$Z = 4(\Gamma_{1,12}\Gamma_{1,12} - \Gamma_{1,11}\Gamma_{1,22}) = \partial_1 E\,\partial_1 G - 2\partial_1 E\,\partial_2 F + \partial_2 E\,\partial_2 E.$$

Выдающаяся (egregium) теорема Гаусса

Рассмотрим двумерное многообразие, представленное в виде поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{79}$$

в трехмерном евклидовом пространстве. В таком случае компоненты (72) равны скалярным произведениям

$$g_m n = \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n. \tag{80}$$

Следовательно, компоненты (74) равны скалярным произведениям

$$\Gamma_{a,mn} = \frac{1}{2}\left(\partial_m g_{an} + \partial_n g_{am} - \partial_a g_{mn}\right) = \mathbf{r}_a \mathbf{r}_{mn}. \tag{81}$$

Отсюда следует, что скалярные произведения

$$\mathbf{r}_a(\mathbf{r}_{mn} - \Gamma_{mn}^{\;\;s}\mathbf{r}_s)$$

равны нулю, а значит,

$$\mathbf{r}_{mn} = \Gamma_{mn}^{\;\;s}\mathbf{r}_s + B_{mn}\mathbf{P}, \tag{82}$$

где $\mathbf{P}$ — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности (79) в точке приложения, компоненты B_{mn} равны скалярным произведениям

$$B_{mn} = \mathbf{P}\mathbf{r}_{mn}. \tag{83}$$

Дифференцируя (81), получаем равенство

$$\mathbf{r}_{ab}\mathbf{r}_{mn} + \mathbf{r}_a\mathbf{r}_{bmn} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{bm}g_{an} + \partial^2_{bn}g_{am} - \partial^2_{ab}g_{mn}\right).$$

Переставляя здесь местами индексы m и b, получаем другое

$$\mathbf{r}_{am}\mathbf{r}_{bn} + \mathbf{r}_a\mathbf{r}_{mbn} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{mb}g_{an} + \partial^2_{mn}g_{ab} - \partial^2_{am}g_{bn}\right).$$

Вычитая из первого второе, находим

$$\mathbf{r}_{ab}\mathbf{r}_{mn} - \mathbf{r}_{am}\mathbf{r}_{bn} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{bn}g_{am} + \partial^2_{am}g_{bn} - \partial^2_{ab}g_{mn} - \partial^2_{mn}g_{ab}\right).$$

Сравнивая последнее с равенством (71), находим

$$\mathbf{r}_{ab}\mathbf{r}_{mn} - \mathbf{r}_{am}\mathbf{r}_{bn} = R_{bman} - g_{pq}\left(\Gamma_{bn}^{\;\;p}\Gamma_{am}^{\;\;q} - \Gamma_{mn}^{\;\;p}\Gamma_{ab}^{\;\;q}\right).$$

С другой стороны, согласно (82)

$$\mathbf{r}_{ab}\mathbf{r}_{mn} = B_{ab}B_{mn} + g_{pq}\Gamma_{mn}^{\ \ p}\Gamma_{ab}^{\ \ q}.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$R_{bman} = B_{ab}B_{mn} - B_{am}B_{bn}. \tag{84}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (77), получаем

$$B_{ab}B_{mn} - B_{am}B_{bn} = K(g_{ab}g_{mn} - g_{am}g_{bn}). \tag{85}$$

В частности,

$$B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12} = K(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}). \tag{86}$$

Гаусс шел обратным путем: назвав мерой кривизны отношение K определителей B к g, он вывел для K формулу (78), «...которая сама собой приводит к выдающейся (egregium)

т е о р е м е. *Если кривая поверхность будет развернута на любую другую поверхность, то при этом мера кривизны в каждой ее точке остается неизменной.*

Очевидно также, что любая конечная часть кривой поверхности после развертывания на другую поверхность сохранит ту же полную кривизну.» [11, с. 140].

Интегральная теорема Стокса

Конспект теории интегрирования на многообразиях составлен мною и частично опубликован в [12]. В связи с этой теорией особо выделяются тензорные поля без верхних индексов с антисимметричными по всем нижним индексам компонентами

$$\Omega_{a_1\dots a_K}. \tag{87}$$

Тензорное поле с антисимметричными компонентами (87) называем полем типа $[k]$. При $K < 2$ условие антисимметричности теряет смысл и в этом случае снимается, но понятие типа $[k]$ сохраняется, так что $[1] = (0/1)$, $[0] = (0/0)$. Иначе говоря, тензорное поле типа [1] является ковекторным полем Ω_a, а тензорное поле типа [0] является скалярным полем Ω. Но при $K > N$ все поля типа $[k]$ равны нулю, так что в скобке $[k]$ имеет смысл рассматривать только целые числа K из интервала $0 \le K \le N$. В этих пределах соответсвенно меняется и размерность области интегрирования. Число сущестенных компонент (87) равно

$$C_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!}. \tag{88}$$

Интеграл по K-мерной области интегрирования D берется от тензорного поля типа $[k]$. Если эта область задается в виде

$$x^a = x^a(u^1, \dots, u^K), \quad a = 1, \dots, N, \tag{89}$$

то интеграл от тензорного поля (87) типа $[k]$ по области D равен K-кратному интегралу

$$\Omega(D) = \int \dots \int \Omega_{a_1\dots a_K} \frac{\partial x^{a_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{a_K}}{\partial u^K}\, du^1 \dots du^K. \tag{90}$$

Одномерная область L — это кривая. Если она задана в виде

$$x^a = x^a(u), \quad a = 1, \dots, N, \tag{91}$$

то интеграл от ковекторного поля Ω_a равен

$$\Omega(L) = \int \Omega_a \frac{\partial x^a}{\partial u}\, du. \tag{92}$$

Нульмерная область — это точка P. Интеграл от скалярного поля Ω по этой области равен значению $\Omega(P)$ этого поля в точке P.

При сформулированных выше условиях можно ручаться, что интегралы не зависят ни от выбора координат x, ни от выбора параметров u, а если какой-либо интеграл зависит от выбора координат, то ему нет места ни в теории многообразий, ни в ОТО.

Главную роль в теории интегрирования на многообразиях поля играет теорема Стокса, согласно которой интеграл от тензорного поля Ω типа $[k]$ по границе D', ограничивающей $(K+1)$-мерную область D равен интегралу по области D от внешней поизводной Ω' поля Ω, то есть

$$\Omega(D')\,\Omega'(D). \tag{93}$$

Внешняя производная определяется следующим образом. Если компонента (87) антисимметрична по всем K индексам, то комбинация

$$\Omega_{aa_1\ldots a_K} = \partial_a\Omega_{a_1\ldots a_K} - \partial_{a_1}\Omega_{aa_2\ldots a_K} - \partial_{a_2}\Omega_{a_1aa_3\ldots a_K} - \cdots - \partial_{a_K}\Omega_{a_1\ldots a_{K-1}a} \tag{94}$$

ее частных производных антисимметрична по всем своим $K+1$ индексам. Если к тому же (87) является компонентой тензорного поля типа $[k]$, то комбинация (94) является компонентой тензорного типа $[k+1]$. Полученное таким образом тензорное поле Ω' типа $[k+1]$ называется внешней производной исходного поля Ω типа $[k]$. При $K = 0$ формула (94) теряет свой смысл, и ее нужно дополнить определением $\Omega'_a = \partial_a\Omega$.

Сделаем следующее очень важное замечание. В отличие от ковариантной производной для определения внешней производной вводить аффинную связность не потребовалось.

Интегральная теорема Гаусса

В случае ориентируемого многообразия X существует тензорное поле E типа $[N]$, такое что всюду

$$e = E_{1\ldots N} > 0. \tag{95}$$

Назовем его мерой обьема. Вместе с E рассмотрим векторное поле F^a и составим тензорное поле (FE) типа $[N-1]$ с компонентами, равными сверткам

$$(FE)_{a_1\ldots a_{N-1}} = F^b E_{ba_1\ldots a_{N-1}}. \tag{96}$$

Внешняя производная $(FE)'$ поля (FE) является тензорным полем типа $[N]$. Поэтому она отличается от поля E только скалярным множителем f:

$$(FE)' = fE. \tag{97}$$

Подставляя (96) в (94), находим этот множитель:

$$f = e^{-1}\partial_b(eF^b). \tag{98}$$

Скалярное поле f называется дивергенцией векторного поля F^b (относительно меры обьема E).

В применении к тензорному полю (96) типа $[N-1]$ теорема Стокса называется теоремой Гаусса.

Интегральная теорема Гаусса в римановом мире

В римановом мире с метрикой

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a dx^b \tag{99}$$

аффинная связность $\Gamma_{mn}^{\ a}$ задается скобкой Кристоффеля (40). Элемент обьема задается в виде

$$dX = e\,dx^1 \ldots dx^N, \tag{100}$$

где определенная по формуле (95) компонента e равна (43). Дивергенция (98) равна

$$f = e^{-1}\partial_b(eF^b) = \nabla_b F^b \tag{101}$$

Теорема Гаусса в римановом мире записывается в виде

$$\int\limits_{D'} F^a g_{ab}\,d\Sigma^b = \int\limits_{D} \nabla_b F^b\,dX, \tag{102}$$

где $d\Sigma^b$ вектор площадки на границе D' области D. Отметим, что

$$\nabla_b F^b = (\check{\nabla}_b - P_{ab}^{\ \ a})F^b, \tag{103}$$

где $P_{mn}^{\ \ a}$ — тензор аффинной деформации (20).

Крайне важно понять, что теорема Гаусса применима только к векторному полю. Широко распространенный, но неверный вывод о том, что энергия гравитационного поля нелокализуема, получается в результате применения теоремы Гаусса к объекту, не являющемуся векторным полем. В переводе на русский, как написано на стрнице 436 в статье [13], выражение "энергия не локализуема" означает (цитирую):

"Энергия гравитационного поля не локализуема, т. е. не существует однозначно определенной плотности энергии."

Подумать только! Речь идет о понятии, играющем центральную роль в современной теоретической физике. Ведь так и начинается статья [13]:

"Понятие энергии играет центральную роль в современной теоретической физике."

Что да — то да!

Уравнение геодезических

К понятию симметричной аффинной связности можно подойти, рассматривая уравнение геодезических в виде

$$\frac{dx^a}{d\tau} = p^a, \quad \frac{dp^a}{d\tau} = -\Gamma_{mn}^{\ a} p^m p^n. \tag{104}$$

Правые части этих уравнений будем считать компонентами

$$\Gamma^a = p^a, \quad \Gamma^{N+a} = -\Gamma_{mn}^{\ a}(x) p^m p^n \tag{105}$$

векторного поля на $2N$-мерном многообразии с координатами

$$x^1, \ldots, x^N, \quad x^{N+1} = p^1, \ldots, x^{2N} = p^N. \tag{106}$$

В соответствии с этим условием, переходя к новым координатам

$$y^k = y^k(x,p), \quad k = 1, \ldots, 2N, \tag{108}$$

уравнение (104) преобразуем к виду

$$\frac{dy^k}{d\tau} = H^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^a}\, p^a - \frac{\partial y^k}{\partial p^a}\, \Gamma_{mn}^{\ a} p^m p^n, \quad k = 1, \ldots, 2N. \tag{109}$$

В частности при

$$y^a(x,p) = y^a(x), \quad y^{N+a}(x,p) = \frac{\partial y^a}{\partial x^m}\, p^m = q^a \tag{110}$$

получаем

$$H^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^m}\, p^m, \quad H^{N+a} = \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^m\, \partial x^n} - \frac{\partial y^a}{\partial x^s}\, \Gamma_{mn}^{\ s}\right) p^m p^n, \tag{111}$$

так что при переходе (110) уравнения (104) сохраняют свой вид:

$$\frac{dy^a}{d\tau} = q^a, \quad \frac{dq^a}{d\tau} = -H_{mn}^{\ a} q^m q^n, \tag{112}$$

где компоненты $H_{mn}^{\ a}$ связаны с компонентами $\Gamma_{mn}^{\ a}$ по правилу

$$-H_{mn}^{\ a} = \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i\, \partial x^j} - \frac{\partial y^a}{\partial x^s}\, \Gamma_{ij}^{\ s}\right) \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^j}{\partial y^n}, \tag{113}$$

эквивалентному правилу (2), определяющему аффинную связность.

Выделение преобразований (110) среди всех координатных преобразований $2N$-мерного многообразия сохраняет его структуру касательного пучка $P(X)$ векторов исходного многообразия X. Мы доказали теорему: если функции (105) от x, p составляют векторное поле на $P(X)$, то функции $\Gamma_{mn}^{\ a}$ от x составляют симметричную афинную связность на X, то функция (105) от x, p составляют векторное поле на $P(X)$.

Интересно, что $P(X)$ является ориентируемым многообразием, так как якобиан преобразования (110) больше нуля. Действительно, так как производные $\partial y^k/\partial p^b$ равны нулю, если $k \le N$, и равны $\partial y^a/\partial x^b$ если $k = N + a$, то этот якобиан равен

$$\frac{\partial(y^1, \ldots, y^N; y^{N+1}, \ldots, y^{2N})}{\partial(x^1, \ldots, x^N; p^1, \ldots, p^N)} = \left(\frac{\partial(y^1, \ldots, y^N)}{\partial(x^1, \ldots, x^N)}\right)^2 > 0. \tag{114}$$

Ввиду того, что он положителен и не зависит от p, на многообразии $P(X)$ можно задать меру обьема с помощью тензорного поля типа $[2N]$, основная компонента которого не зависит от p:

$$E_{1\ldots N\ldots 2N} = E = E(x^1, \ldots, x^N) > 0. \tag{115}$$

Дивергенция векторного поля (105) относительно этой меры равна на $P(X)$ скалярному полю

$$f(x,p) = E^{-1} p^a (\partial_a E - 2\Gamma_a E). \tag{116}$$

Если эта дивергенция равна нулю, то связность $\Gamma_{mn}^{\ a}$ эквиаффинна. В этом случае

$$\Gamma_a = \frac{1}{2E}\, \partial_a E. \tag{117}$$

Если связность Γ_{mn}^{a} равна скобке Кристоффеля (40), то согласно (42) $E = |g|$ и дивергенция (116) равна нулю.

Такой подход к понятию аффинной связности был рассмотрен в работе [14] по кинетической теории газов в ОТО. Утверждение о том, что в этой теории дивергенция (116) равна нулю, аналогично известной в статистической физике теореме Лиувилля.

Основы тензорной теории тяготения

Полагаем, что существуют два симметричных тензорных поля: g^{ab} и $P_{mn}{}^{a}$. Условие симметрии означает $g^{ab} = g^{ba}$ и $P_{mn}{}^{a} = P_{nm}{}^{a}$. Полагаем, что тензор g^{ab} задает в точке своего приложения касательное пространство скоростей, наделяя его геометрией Лобачевского [15]. Следовательно, существует обратное поле g_{ab} и метрика (99) нормального гиперболического типа.

Вводим связность Кристоффеля (40) и фоновую связность

$$\check{\Gamma}_{mn}{}^{a} = \Gamma_{mn}{}^{a} + P_{mn}{}^{a}. \tag{118}$$

Полагаем, что действие материи не зависит от тензора $P_{mn}{}^{a}$, а действие гравитационого поля задается сверткой

$$L = g^{ab} P_{ab}, \tag{119}$$

где тензор P_{ab} равен (39). В силу первого из этих условий определяемый по Гильберту тензор энергии-импульса материи M_{ab} в излагаемой теории точь в точь такой же, как и в Эйнштейновской теории, а следовательно,

$$\nabla_a g^{an} M_{nb} = 0. \tag{120}$$

В силу второго из этих условий в полевом гравитационном уравнении Эйнштейна тензор R_{ab} заменяется на тензор

$$S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba}), \tag{121}$$

а в псевдотензоре Эйнштейна связность Γ_{mn}^{a} заменяется на тензор, равный — $P_{mn}{}^{a}$. В результате приходим к гравитационному уравнению

$$S_{ab} - \frac{1}{2} S g_{ab} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} M_{ab}, \tag{122}$$

где

$$S = g^{mn} S_{mn}, \tag{123}$$

и к тензору энергии-импульса

$$E_b^a = \Phi_b^{mn}(P_{mn}{}^{a} - P_m \delta_n^a) - L\delta_b^a, \tag{124}$$

где

$$\Phi_b^{mn} = (\check{\nabla}_b - P_b) g^{mn} = g^{ms} P_{sb}{}^{n} + g^{ns} P_{sb}{}^{m} - g^{mn} P_b. \tag{125}$$

При выводе полевого уравнения (122) по теореме Гаусса (102) лангражиан L можно заменить на S, так как из (33) следует равенство

$$L = S + \nabla_a(\Phi^a - P^a), \tag{126}$$

где

$$\varPhi^a = \varPhi^{an}_n = g^{mn} P_{mn}{}^a, \tag{127}$$
$$P^a = g^{ab} P_b = g^{ab} P_{bn}{}^n. \tag{128}$$

В связи с тензором (121) представляют интерес следующие равенства:

$$\begin{aligned}\nabla_a g^{an}(2S_{nb} - Sg_{nb}) = \nabla_a g^{an}(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn}) - \nabla_b g^{mn}\check{R}_{mn} = \\ = (\check{\nabla}_a - P_a)[g^{an}(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn})] - g^{mn}\check{\nabla}_b R_{mn};\end{aligned} \tag{129}$$
$$g^{an}(2S_{nb} - Sg_{nb}) - E^a_b = (\check{\nabla}_n - P_n)[U^{an}_b + \varPhi^a\delta^n_b - \varPhi^{na}_b], \tag{130}$$

где

$$U^{an}_b = g^{ns} P_{bs}{}^a - g^{as} P_{bs}{}^n + \delta^a_b(\varPhi^n - P^n) - \delta^n_b(\varPhi^a - P^a). \tag{131}$$

Вектор $\varPhi^a$ называем вектором ангармоничности фоновой связности (118), так как в теории гравитации Эйнштейна условие

$$\varPhi^a = 0 \tag{132}$$

определяет гармонические координаты. Поэтому и тензор (125) называем тензором ангармоничности фоновой связности.

Если

$$\check{\nabla}_a(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn}) = 0, \tag{133}$$

то из (120), (122) и (129) следует

$$(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn})\varPhi^n = 0. \tag{134}$$

Теория Эйнштейна-Розена как частный случай

Если фоновая связность (118) полупримитивна, то

$$S_{ab} = R_{ab}, \tag{135}$$

и уравнение (122) совпадает с уравнением Эйнштейна-Гильберта. Однако условие (135) слишком слабо для того, чтобы мы, опираясь на него, могли выделить ту часть эйнштейновской теории, которая исторически связана с псевдотензорной субкультурой. Необходимым и достаточным для этого является условие

$$\check{R}^a_{kln} = 0 \tag{136}$$

примитивности фоновой связности (118). При этом условии найдется такая координатная карта, в которой всюду

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = 0. \tag{137}$$

В такой карте тензор (124) совпадает с псевдотензором Эйнштейна.

В свое время в псевдотензорной части эйнштейновской теории навел порядок Н. Розен [16], введя в нее, наряду с полевым метрическим тензором g_{ab}, фоновый тензор $\check{g}_{ab}$, задающий метрику Минковского

$$d\check{s}^2 = \check{g}_{ab}\, dx^a dx^b, \tag{138}$$

записанную в произвольных координатах. Скобки Кристоффеля для метрики (138) составляют фоновую связность $\check{\Gamma}_{mn}{}^a$, удовлетворяющую условию (137). Развитый Розеном метод получил название двуметрического формализма.

Однако сам фоновый тензор ни в одну из конечных формул Розена не входит, а входят от него лишь скобки Кристоффеля. В этом можно убедиться на примере условия гармоничности (132). Но мы уже знаем, что метрика (62) несет в себе больше информации, чем связность (60). Эта, избыточная по сравнению с условием (136), информация учтена в релятивисткой теории гравитации Логунова [17].

Теория Логунова

Теория Логунова выходит за рамки проведенного доселе рассмотрения тензорной теории тяготения, ибо в теории Логунова к действию материи добавляется часть, задаваемая суммой

$$g^{ab} P_{ab} + m^2 \left(\frac{1}{2} g^{ab} \breve{g}_{ab} - \sqrt{\breve{g} g^{-1}} - 1 \right), \tag{139}$$

а не сверткой (119). При этом вместо уравнения (122) выступает уравнение

$$R_{ab} - \breve{R}_{ab} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \left(M_{ab} - \frac{1}{2} M g_{ab} \right) + \frac{m^2}{2} (g_{ab} - \breve{g}_{ab}). \tag{140}$$

В данном случае фоновая связность равняется скобке Кристоффеля для фоновой метрики, а следовательно, $\breve{R}_{ab} = \breve{R}_{ba}$. Если фоновая связность примитивна, то есть если в данном случае

$$\breve{R}_{ab} = 0, \tag{141}$$

то уравнение (140) совпадает с гравитационным уравнением Логунова, которое в оригинале записано в [17] на с. 40. В теории же Логунова выполняется более сильное, чем (141), условие (136). В другом виде гравитационное уравнение записано в [17] на с. 28 и в наших обозначениях выглядит следующим образом:

$$G_{ab} + \frac{m^2}{2} \left\{ g_{ab} + \breve{g}_{ab} - \frac{1}{2} \breve{g}_{rs} g^{rs} g_{ab} \right\} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} M_{ab}. \tag{142}$$

Из гравитационоого уравнения Логунова (142) в силу (46) и (120) получается замечательное следствие

$$m^2 \nabla_b \left\{ \breve{g}_{as} g^{sb} - \frac{1}{2} \breve{g}_{rs} g^{rs} \delta^b_a \right\} = 0. \tag{143}$$

Но

$$\nabla_b \left\{ \breve{g}_{as} g^{sb} - \frac{1}{2} \breve{g}_{rs} g^{rs} \delta^b_a \right\} = \breve{g}_{as} \Phi^s, \tag{144}$$

где Φ^s — вектор гармоничности (127). Поэтому, поскольку в теории Логунова $m \neq 0$ и тензор $\breve{g}_{as}$ невырожден, условие гармоничности (132) является следствием полевого уравнения (142). Напротив, если $m = 0$, то условие гармоничности (132) не следует из уравнения (142). Но при $m = 0$ уравнение Логунова (142) совпадает с уравнением Эйнштейна. Эти обстоятельства заставляют думать, что теория Эйнштейна-Розена является не частным, а особым, исключительным случаем теории Логунова.

Введение фоновой метрики в плотность ланагражиана (139), на наш взгляд, является главным в теории гравитации Логунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черников Н.А.* Геометрия Лобачевского как физическая наука. В кн.: 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. М.: ВИНИТИ, *1977*, с. 146–153.

2. *Черников Н.А.* Введение геометрии Лобачевского в механику и закон всемирного тяготения. — Труды межународного семинара "Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля". т. 2, Протвино, *1980*, с. 249–260.
3. *Черников Н.А.* Релятивистская теория тяготения с двумя аффинными связностями. — Краткие сообщения ОИЯИ, 3 [60]–93, Дубна, *1993*, с. 5–12.
4. *Черников Н.А.* Геометрия Лобачевского и современная теория тяготения. — Известия ВУЗов. Математика. № 2 (381), *1994*, с. 60–66.
5. *Черников Н.А.* Геометрия Лобачевского и теория тяготения Ньютона. — In memoriam N.I. Lobatchevskii. Vol. 111, Part 1, Изд-во Казанского университета, *1995*, с. 171–176.
6. *Chernikov N.A.* The relativistic Kepler problem in the Lobachevsky space. — Acta Phisica Polonica. Vol. B 24, № 5, *1993*, p. 927–950.
7. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, *1976*.
8. *Черников Н.А.* Эйнштейновская теория гравитации с точки зрения тензорного анализа. Сообщения ОИЯИ Р2–90–399, Дубна, *1990*.
9. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, *1955*, с. 201.
10. *Широков П.А.* Симметрические конформно-евклидовы пространства. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казанского университета, *1966*, с. 366–382.
11. *Гаусс К.Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях. В кн.: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, *1956*, с. 123–161.
12. *Черников Н.А.* Необходимый объект в ОТО — фоновая связность. Препринт ОИЯИ Р2–88–778. Дубна, *1988*.
13. *Фадеев Л.Д.* Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна. УФН, т. 136, вып. 3, *1982*, с. 435–457.
14. *Черников Н.А.* Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле. ДАН СССР, т. 144, № 1, *1962*, с. 89–92.
15. *Черников Н.А.* Геометрия Лобачевского и релятивистская механика. ЭЧАЯ, т. 4, вып. 3, *1973*, с. 773–810.
16. *Rosen N.* General Relativity and Flat Space. Physical Review. Vol. 57, January 15, *1940*, p. 147–153.
17. *Логунов А.А.* Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. Препринт ИФВЭ 95–128, Протвино, *1995*.