ГРАВИТАЦИЯ Том 3 Выпуск 1 1997
Журнал по дискуссионным проблемам гравитационной физики .... *стр. 15–25*

ПРИНЦИП МАХА

СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ ПРИНЦИПУ МАХА[1]

К. В. Анисович

НПО "Спектрон", С.-Петербург, Россия

Показано, что введение скалярного поля в теориию гравитации делает возможной реализацию принципа Маха в том виде, в каком он был сформулирован Эйнштейном: "все $g^{\mu\nu}$-поле должно полностью определяться распределением и движением окружающих масс". Теория обеспечивает все основные стандартные следствия, а нерелятивистский предел позволяет сформулировать ньютонову механику в терминах движения окружающих масс, которые имеют одну и ту же форму в любой системе отсчета.

Содержание

1. Введение. Принцип Маха

Эта работа выполнялась с намерением показать, что введение скалярного поля в теорию гравитации позволяет реализовать принцип Маха. Принцип Маха утверждает, что не существует абсолютного пространства, по отношению к которому можно говорить об ускоренном движении. А именно, то, что выделяет систему отсчета, движущуюся ускоренно относительно инерциальной, не является результатом различий в движении этих систем относительно "абсолютного пространства", но результатом различий в движении относительно окружающих, но удаленных тел (звезд) [1].

В рамках полевой теории гравитации с тензорным полем $\hat{g}^{\mu\nu}$ в произвольных координатах $\hat{x}^{\alpha}$ (которая должна описывать как действие гравитации, так и эффекты инерции), принцип Маха был сформулирован А.Эйнштейном [2] следующим

[1] Перевод (Г. М. Тележко) с оригинала "Problems on high energy physics and field theory" (Proceedings of the XII Workshop). Moscow. Nauka. *1990*, p. 59–72.

образом: "все поле $\hat{g}^{\mu\nu}$ должно быть полностью определено распределением и движением окружающих масс". Могло бы показаться, что основная идея принципа Маха реализована в общей теории относительности (ОТО), поскольку в ней при произвольной координатной арифметизации (в частности, в прозвольной системе отсчета) поле $\hat{g}^{\mu\nu}$ определяется с помощью уравнения Гильберта-Эйнштейна по заданному распределению и движению источников в данных произвольных координатах $\hat{x}^\alpha$. Для решения проблемы в данной системе отсчета необходимо задать поле $\hat{g}^{\mu\nu}$ на бесконечности [3], которое определяет основной вклад в поле $\hat{g}^{\mu\nu}_P$ в данной точке P, но такое задание ("руками") сводит на нет эвристическую идею, принятую Эйнштейном в качестве исходного принципа в ОТО.

Заметим, что формулировка принципа Маха и по Маху, и по Эйнштейну имеет интегральную природу ($\hat{g}^{\mu\nu}$ определяется полным вкладом всех масс). Итак, реализацию принципа Маха следует искать в интегральной формулировке выражения для $\hat{g}^{\mu\nu}$ в терминах источников. С этой целью введем параллельно с физической метрикой Римана $\hat{g}^{\mu\nu}$ в произвольных координатах $\hat{x}^\alpha$ плоскую "фоновую" метрику наблюдателя Q : $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(C_0^2, -1, -1, -1)$ в стандартных хронометрических координатах $\tilde{x}^\alpha$:

$$\tilde{x}^0 = t, \quad \tilde{x}^1 = r\sin\theta\cos\psi, \quad \tilde{x}^2 = r\sin\theta\sin\psi, \quad \tilde{x}^3 = r\cos\theta, \tag{1}$$

где расстояние r до точки N определяется интервалом $s_{MM'}$ вдоль 4-траектории $\hat{x}^\alpha_M(\lambda)$ (λ —параметр) тела отсчета $\tilde{Q}$ (см. рис. 1):

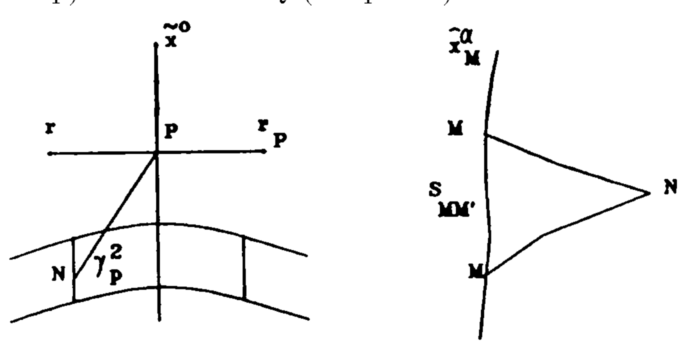

Рис. 1.

$$r_N = \frac{1}{2}s_{MM'} = \int\limits_{M'}^{M} (\hat{g}_{\alpha\beta}d\hat{x}^\alpha_M d\hat{x}^\beta_M)^{\frac{1}{2}} \equiv \tilde{\gamma}_{ik}\tilde{x}^i_N\tilde{x}^k_N. \qquad (i,k = 1,2,3), \text{ —} \tag{2}$$

между посылкой светового сигнала из 4-точки M$'$ на линии $\hat{x}^\alpha_M$ в 4-точку N и его возвращением в точку M после отражения. Углы θ и ψ в (1) определены световым сигналом, приходящим в M из N. Событию N в координатах $\tilde{x}^\alpha$ также приписывается момент времени:

$$t_N = t_M - \frac{1}{2C_0}\int\limits_{M'}^{M} (\hat{g}_{\alpha\beta}d\hat{x}^\alpha_M d\hat{x}^\beta_M)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Введение координат $\tilde{x}^\alpha$ ковариантно в том смысле, что оно не зависит от первичной арифметизации $\hat{x}^\alpha$.

Рассмотрим 4-точку P, в которой необходимо определить величину поля $g^{\mu\nu}_P$.

В координатах $\tilde{x}^\alpha$ интегральное выражение для $g^{\mu\nu}$ в терминах источников получается с помощью 4-мерной формулы Грина для функций $1/\tilde{\gamma}_0^2$ и $\tilde{g}^{\mu\nu}$.

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tilde{g}^{\mu\nu}\Box\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\right)-\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\Box\tilde{g}^{\mu\nu}\right]d^4\tilde{x}=\int\limits_{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}\left[\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\left(\tilde{g}^{\mu\nu}\right)^{,\bar{\alpha}}-\tilde{g}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\right)^{,\bar{\alpha}}\right]d\tilde{\sigma}_\alpha, \qquad (4)$$

где $\tilde{\gamma}_P^2=\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\alpha-\tilde{x}_P^\alpha)(\tilde{x}^\beta-\tilde{x}_P^\beta)$, $\Box=\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}\partial^2/\partial\tilde{x}^\alpha\partial\tilde{x}^\beta$, $(\ )^{,\bar{\alpha}}=\tilde{\gamma}^{\bar{\alpha}\beta}(\ )_{,\beta}$, $d\tilde{\sigma}_\alpha=d^4\tilde{x}/d\tilde{x}^\alpha$. В (4) 4-объем ограничен двумя гиперсферами: σ_1 с $\tilde{\gamma}_P^2=\mathrm{const}\to 0$ и σ_3 с $\tilde{\gamma}_P^2\to\infty$ (см. рис. 1) — и ограниченным ($\tilde{x}^0<\tilde{x}_P^0-r/C_0$) гиперцилиндром σ_2 с радиусом r и образующей, параллельной мировой линии $\tilde{x}_M^\alpha$ тела отсчета $\tilde{Q}$. Интегрирование (4) по σ_1 [4] с учетом $\int\sigma_3\to 0$ ($\tilde{g}^{\mu\nu}$ ограничено) дает выражение для $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в точке P в виде интегралов по объему и по поверхности:

$$\tilde{g}_P^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\Box\tilde{g}^{\mu\nu}}{\tilde{\gamma}_P^2}-\tilde{g}^{\mu\nu}\Box\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\right)\right]d^4\tilde{x}-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\sigma_2}\left[\tilde{g}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\right)^{,\alpha}-\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\left(\tilde{g}^{\mu\nu}\right)^{,\alpha}\right]d\tilde{\sigma}_\alpha. \quad (5)$$

Связь (5) с гравитационным полем обеспечивается выражением $\Box\tilde{g}^{\mu\nu}$ через тензор Риччи $\tilde{R}^{\mu\nu}$ [3]:

$$\Box\hat{g}^{\mu\nu}=-2\hat{R}^{\mu\nu}-2\hat{\Gamma}^{\mu\nu}+2\hat{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}\hat{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\beta}-\hat{\psi}^{\alpha\beta}\hat{g}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta}, \qquad (6)$$

где $\hat{\psi}^{\alpha\beta}=\hat{g}^{\alpha\beta}-\hat{\gamma}^{\alpha\beta}$,

$$\hat{\Gamma}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\nu,\mu}+\Gamma^{\mu,\nu}-\Gamma^\alpha\hat{g}^{\mu\nu}_{,\alpha}), \quad \Gamma^\alpha=\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}(\hat{g}^{\alpha\beta}\sqrt{-\hat{g}})_{,\beta}.$$

Затем, выражая $\tilde{R}^{\mu\nu}$ через источник $\tilde{T}^{\mu\nu}$, который должен присутствовать в уравнениях гравитационного поля, мы получим связь интеграла по объему в (5) с источником поля $\tilde{T}^{\mu\nu}$.

Сформулируем принцип Маха как требование равенства нулю вклада поверхностного интеграла в $\tilde{g}_P^{\mu\nu}$ в (5) в координатах $\tilde{x}^\alpha$ при стремлении r к бесконечности.

$$\frac{1}{\tilde{g}_P^{\mu\nu}}\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\sigma_2}\left[\tilde{g}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\right)^{,\alpha}-\frac{1}{\tilde{\gamma}_P^2}\left(\tilde{g}^{\mu\nu}\right)^{,\alpha}\right]d\tilde{\sigma}_\alpha=0. \qquad (7)$$

Таким образом, удовлетворяя условиям (1)–(3), (7), из (5), (6) и принимая во внимание уравнения теории, связывающие $\tilde{R}^{\mu\nu}$ с источником $\tilde{T}^{\mu\nu}$, мы получаем, что величина поля $\tilde{g}_P^{\mu\nu}$ в окрестности точки P определена полностью объемным распределением источников, что соответствует принципу Маха, согласно [2].

Для конкретизации формулировки условия (7) допустим также, что оно сформулировано в хронометрических координатах тела отсчета $\tilde{Q}$, которое практически стационарно относительно основного распределения материи во Вселенной (в $\tilde{Q}$ реликтовое излучение изотропно). Инерциальные свойства $\tilde{Q}$ не ограничиваются.

Хотя в (5) интегрирование в $\int d\Omega$ выполняется по всему пространству ($r\to\infty$), но при заданной точности δ в расчете $\tilde{g}_P^{\mu\nu}$ вкладом удаленных источников можно пренебречь, поскольку из (5) величина интеграла по объему $\int_\rho d\Omega$ от $r=\rho$ до $r=\infty$ равна разности $\int_\rho d\Omega-\int_\infty d\Omega$ поверхностных интегралов для $r=\rho$ и $r=\infty$. Но, благодаря (7), для данной малой величины δ всегда найдется такое ρ, для которого $\int_\rho d\sigma<\delta$ и, поэтому, $\int_\rho d\Omega<\delta$.

2. Функция Лагранжа, уравнения поля

Можно показать [5] (см. также ниже), что если в теории с условием (7) использовать стандартный лагранжиан ОТО, то из уравнений Гильберта-Эйнштейна, связывающих $\hat{R}^{\mu\nu}$ и $\hat{T}^{\mu\nu}$, ме не только не получим правильных величин стандартных гравитационных эффектов, но и правильного значения сигнатуры метрики $\tilde{g}^{\mu\nu}$. Поэтому мы используем лагранжиан с тензорным $\hat{g}^{\mu\nu}$ и скалярным φ полями:

$$L = -8\pi\mu_0 + \frac{R}{æ} - A(\varphi)\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}, \tag{8}$$

где μ_0 — инвариантная плотность масс (для разделенных масс $\mu_0 = \sum\limits_a \frac{m_a\, dS_a}{\sqrt{-\hat{g}}}\delta^4_a(\hat{x})$), R — кривизна, æ — размерная константа, $\varphi^{,\alpha} = \hat{g}^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}$; $A(\varphi)$ — функция скалярного поля φ.

Варьируя действие $S = \int L\sqrt{-\hat{g}}\, d^4\hat{x}$ и полагая $\delta_g S = 0$, мы получаем уравнения для $\hat{g}^{\mu\nu}$:

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}R = -4\pi æ\mu_0\hat{U}_\mu\hat{U}_\nu - æA(\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}), \tag{9}$$

из которых, свертывая (9) с $\hat{g}^{\mu\nu}$, мы получаем

$$R = 4\pi æ\mu_0 - æA\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} \tag{10}$$

и, следовательно, находим из (9) вторую форму уравнений для поля $\hat{g}^{\mu\nu}$:

$$\hat{R}^{\mu\nu} = -4\pi æ\mu_0(\hat{U}^\mu\hat{U}^\nu - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}) - æA\varphi^{,\mu}\varphi^{,\nu}. \tag{11}$$

Варьируя, в свою очередь, S по полю φ, мы получаем уравнение для φ:

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}(A\sqrt{-\hat{g}}\varphi^{,\beta})_{,\beta} + A_{,\varphi}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} = 0 \tag{12}$$

(слева — ковариантная производная $(A\varphi^{,\beta})_{;\beta}$).

3. Решение уравнений поля в первом приближении внутри островного распределения материи

Найдем решение (11) в первом приближении внутри островного распределения материи, заполняющей объем радиуса r_0, в среднем, равномерно. Предположим, что в координатах x^α из набора $\{\tilde{x}^\alpha\}$ метрика $g^{\mu\nu}$, в нулевом приближении, имеет форму:

$$g_0^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(C_0^{-2}, -1, -1, -1) \tag{13}$$

(как будет видно в дальнейшем, условие, необходимое для удовлетворения (13), — это отсутствие в целом вращательного движения окружающей материи в x^α). Вне островного распределения ($r > r_0$), согласно (7), метрика не может иметь форму (13); как будет показано ниже, за пределами r_0 мы будем иметь $g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu}(r_0/r)^P$ ($P > 0$), что удовлетворяет условию (7).

Представим также, что поле φ в пределах r_0 в координатах x^α статично, $\varphi = \varphi(x^i)$, т.е.:

$$\varphi_{,0} = 0. \tag{14}$$

Если поле $g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu}$ в пределах r_0 слабое ($\psi^{\mu\mu} \ll \gamma^{\mu\mu}$), то в (6) с точностью до членов второго порядка малости мы имеем:

$$\Box g^{\mu\nu} = -2R^{\mu\nu}. \tag{15}$$

Подставляя (15) и (11) в (5) и принимая (7) за пределами r_0, после интегрирования по объему по x^0 [4] мы получаем:

$$g_P^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_V \frac{1}{r}(R^{\mu\nu})^*\, dV, \tag{16}$$

где $dV = dx^1dx^2dx^3$ — трехмерный объем в x^α, $(R^{\mu\nu})^*$ — запаздывающая величина функции (для $t^* = t_P - r/C_0$).

Пусть материя, создающая гравитационное поле, сосредоточена в отдельных массах m_a, движущихся с малыми скоростями ($u_a^i \ll 1$). В этом случае с необходимой точностью мы имеем:

$$u^0u^0 - \frac{1}{2}g^{00} = \frac{1}{2}C_0^{-2}, \qquad u^iu^i - \frac{1}{2}g^{ii} = \frac{1}{2}, \tag{17}$$

что из (16) с использованием (11) дает нам в первом приближении:

$$g_I^{00} = \frac{æ}{C_0^2}\int\limits_V \frac{\mu_0^*\,dV}{r}, \tag{18}$$

$$g_I^{ii} = æ\int\limits_V \frac{\mu_0^*\,dV}{r} - \frac{æ}{2\pi}\int\limits_V \frac{1}{r}A^*(\varphi_{,i}^*)^2\,dV. \tag{19}$$

Полагая, что материя распределена по отдельным массам m_a, из (18) и (19) мы имеем:

$$g_I^{00} = \frac{æ}{C_0^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a^*}, \tag{20}$$

$$g_I^{ii} = æ\sum_a \frac{m_a}{r_a^*} - \frac{æ}{2\pi}\int\limits_V \frac{A^*(\varphi_{,i}^*)^2\,dV}{r}. \tag{21}$$

Из (21) ясно, что, если выполняется условие (7) и скалярное поле φ отсутствует, мы, как и указывалось ранее, не получим правильного значения сигнатуры метрики $g^{\mu\nu}$.

Рассмотрим (20) и (21). Пусть Φ — сумма запаздывающих потенциалов:

$$\sum_a \frac{m_a}{r_a^*} \equiv \Phi^\alpha(x). \tag{22}$$

Выделим величину потенциала m_s/r_s от Φ в (20) для ближайшего тела (пусть, например, m_s соответствует Солнцу):

$$g_I^{00} = \frac{æ\Phi_s}{C_0^2}(1 + \frac{m_s}{r_s\Phi_s}) \simeq g_s^{00}(1 + \frac{m_s}{r_s\Phi}), \tag{23}$$

где Φ_s, g_s^{00} — значения потенциала и поля g^{00} в рассматриваемой точке в отсутствие массы m_s. При переходе к ньютоновскому пределу в g_1^{00}, необходимо, чтобы в (23) выполнялось равенство:

$$\Phi(x^\alpha) = \frac{C^2}{2G}, \tag{24}$$

где $\Phi = \Phi_s$, G — ньютоновская гравитационная “постоянная”, $C(x^\alpha)$ — координатная величина скорости света (в x^α). Поскольку $\Phi(x^\alpha)$ — функция 4-точки, то отношение $C^2/2G$ и взятые по отдельности С и G также (см. ниже) в данной теории не являются постоянными.

Нулевое приближение в (23) для настоящей эпохи дает:

$$æ\Phi = g_I^{00}C_0^2 \simeq 1, \tag{25}$$

что позволяет в нулевом приближении в (21) записать:

$$g_0^{ii} = 1 - \frac{æ}{2\pi} \int\limits_V \frac{A^* (\varphi^*_{,i})^2 \, dV}{r}, \tag{26}$$

Из (26), принимая во внимание требование $g_0^{ii} = -1$, мы получаем, что должно выполняться условие

$$\frac{æ}{4\pi} \int\limits_V \frac{A^* (\varphi^*_{,i})^2 \, dV}{r} = 1, \tag{27}$$

т.е. правильный знак членов метрики g^{ii} обеспечивается тем, что скалярное поле φ определенным образом изменяется в пространстве.

При удовлетворении условия (27) разложение метрики, выраженное через потенциал ближайшего тела m_s/r_s, имеет вид

$$g_I^{ii} = æ\Phi - 2 = -1 + \frac{m_s}{r_s \Phi}, \tag{28}$$

где $\Phi = C^2/2G$, что, как известно [8], соответствует правильному разложению g^{ii} до членов 1-го порядка.

Теперь найдем решение для скалярного поля φ. Внутри области r_0 уравнение (12), принимая во внимание (13), (14), можно записать в виде:

$$A \Delta \varphi - A' \varphi' - A_{,\varphi} (\varphi')^2 = 0. \quad (\varphi' = \varphi_{,r}). \tag{29}$$

Рассмотрим простейший случай, когда $A_{,\varphi} = 0$, полагая, что $A(x^\alpha)$ есть скалярная плотность источника поля φ. В этом случае мы можем считать, что внутри r_0: $A(\varphi')^2 = const$, — а вне r_0: $A \simeq 0$ и $A \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} \simeq 0$. Принимая во внимание, что $A_{,\varphi} = 0$, уравнение (29) внутри r_0 принимает вид:

$$\varphi'' + \frac{2}{r} \varphi' + \frac{1}{A} A' \varphi' = 0, \tag{30}$$

решение которого есть

$$\varphi = \varphi_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^3, \qquad A = A_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^4, \tag{31}$$

где φ_0, A_0 — константы. Из (31) мы имеем $A \varphi^2_{,r} = \dfrac{9 A_0 \varphi_0^2}{r_0^2}$, и условие (27) может быть записано в виде

$$æ \int\limits_0^\infty \frac{1}{r} A^* (\varphi^*_{,r})^2 r^2 \, dr \simeq + \frac{9 A_0 \varphi_0^2 æ}{r_0^2} \int\limits_0^{r_0} r \, dr = \frac{9}{2} A_0 \varphi_0^2 æ = 1. \tag{32}$$
$$(A^* (\varphi^*_{,r}) \simeq 0 \quad \text{для } r > r_0).$$

Из (27) имеем также условие

$$æ A \varphi^2_{,r} = \frac{2}{r_0^2}, \tag{33}$$

которое определяет условие для величины $\dfrac{æ}{2} A \varphi^2_{,r} = \dfrac{1}{r_0^2}$.

4. Центрально-симметричное поле в пределах островного распределения

Найдем статическое поле $g^{\mu\nu}$ массы m, помещенной внутрь островного распределения с $g_0^{\mu\nu}$ из (13). Пусть интервал выражен в сферических хронометрических координатах как

$$ds^2 = C_0^2 e^{\xi}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2). \tag{34}$$

Записывая уравнение (9) в смешанных компонентах , и используя известное выражение (например, [6]) для тензора $R^{\nu}_{\gamma} - 1/2\,\delta^{\nu}_{\gamma} R$ через $g_{\mu\nu}$ из (34), мы получим следующие уравнения для функций λ и ξ:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda_{,r}}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = -4\pi æ\mu_0 u_0 u^0 + \frac{æ}{2} A\varphi_{,r}\varphi^{,r}, \tag{35}$$

$$e^{-\xi}\left(\frac{\xi_{,r}}{r} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = -4\pi æ\mu_0 u_r u^r - \frac{æ}{2} A\varphi_{,r}\varphi^{,r}. \tag{36}$$

Рассмотрим поле вне вещества ($\mu_0 = 0$). Тогда решение уравнений (35), (36) есть:

$$\begin{gathered} g_{00} = C_0^2 e^{\xi} = \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{1}{3}\frac{r^2}{r_0^2}\right), \qquad r_g = \frac{2Gm}{C_0^2}, \\ g_{rr} = -e^{\lambda} = -\left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{1}{3}\frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-1}, \end{gathered} \tag{37}$$

откуда, с учетом (33) имеем:

$$\frac{æ}{2} A\varphi_{,r}^2 = \frac{1}{r_0^2} \simeq 10^{-56}\ \text{см}^{-2}. \tag{38}$$

Данное решение отличается от решения Шварцшильда на небольшую поправку $< 10^{-26}$ (для Солнечной системы), которая не влияет на величину стандартных эффектов (смещение перигелия, отклонение и запаздывание света и т.д.).

5. Центрально-симметричное поле за пределами островного распределения

Найдем условия, при которых поле $g^{\mu\nu}$ за пределами островного распределения материи при $r \to \infty$ удовлетворяет условию Маха (7). Интегрируя (7) по x^0, мы получаем:

$$\frac{1}{g_p^{\mu\nu}} \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{r}(g^{\mu\nu}_{,r})^* - \frac{1}{rC_0}(g^{\mu\nu}_{,0})^* + \frac{2}{r^2}(g^{\mu\nu})^*\right] d\Sigma = 0, \tag{39}$$

где $(g^{\mu\nu})^*$ и т.д. — запаздывающие значения функций, Σ — сфера радиуса r (интеграл по сфере является частью формулы Кирхгофа для функции $g^{\mu\nu}$ [7]). Очевидно, что, если поле $g^{\mu\nu}$ за пределами r_0 убывает с увеличением r как $\sim 1/r^p$ $(p > 0)$, то оно удовлетворяет условиям (39) и (7).

Для поля $g^{\mu\nu}$ за пределами r_0 мы применим уравнение:

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu} R = -æ\bar{A}(\varphi_{,\mu}\varphi^{,\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}) + æ\delta^{\nu}_{\mu}\bar{B}, \tag{40}$$

где $k \gg 1$, $\delta > 0, A\Big|_{r>r_0} = \bar{A} = (A_0/k)(r_0/r)^{\delta}$, $-\bar{B} = \frac{1}{2}\bar{A}\varphi_{,r}\varphi^{,r}$.

Интервал ds^2, соответствующий (40), мы найдем в виде:

$$ds^2 = C_0^2 e^\eta \, dt^2 - e^\gamma (dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\psi^2). \tag{41}$$

Допустим, что за пределами r_0 зависимость правой части (40) от r имеет вид:

$$\frac{æ}{2}\bar{A}\varphi_{,r}\varphi^{,r} = \frac{a}{r^{2+p}}, \qquad æ\bar{B} = \frac{b}{r^{2+p}}. \tag{42}$$

Тогда из (40)–(42) для $R_0^0 - \frac{1}{2}R$ и $R_r^r - \frac{1}{2}R$ в статическом случае мы имеем [6]:

$$e^{-\gamma}\left(\gamma'' + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{2\gamma'}{r}\right) = \frac{b-a}{r^{2+p}}, \qquad e^{-\gamma}\left(\frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'\eta'}{2} + \frac{\gamma'+\eta'}{r}\right) = \frac{b+a}{r^{2+p}}, \tag{43}$$

где $a, b = const > 0$. Решения для g^{00} и g^{rr}:

$$e^{-\gamma} = e^{-\eta} = \frac{1}{r^p}, \qquad p = 2b - 4a, \tag{44}$$

где $b > 2a$, $1 \gg P > 0$. Решение для $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu}\left(\frac{r_0}{r}\right)^p. \tag{45}$$

Это означает, что условия Маха (39), (7) выполнены.

6. Реализация принципа Маха

Согласно принципу Маха система отсчета является инерциальной в случае неускоренного движения окружающих тел относительно нее. Таким образом, для случая невращательного движения материи это должно привести к метрике с $g^{0\psi} = 0$, в соответствии с принципом Маха. Покажем справедливость этого утверждения. Из равенства (16), справедливого и для слабого поля в пределах r_0, с помощью (11) и полагая $u^\psi = 0$, в сферических хронометрических координатах получаем[2,3]

$$g^{0\psi} = -\int\limits_V \frac{g^{0\psi}}{r}\left[æ\mu_0 - æAg^{0r}g^{\psi r}(\varphi_{,r})^2\right] dV = -\int\limits_V \frac{g^{0\psi}}{r}æ\mu_0 \, dV, \tag{46}$$

откуда, поскольку справа — отрицательное выражение, содержащее $g^{0\psi}$, мы имеем в качестве решения (46)

$$g^{0\psi} = 0. \tag{47}$$

Перейдем теперь от системы Q со стандартными координатами x^α к системе $\tilde{Q}$ с координатами $\tilde{x}^\alpha$, пусть в них материя вращается с угловой скоростью $\omega = \dot{\psi}$:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{r} = r, \quad \tilde{\theta} = \theta, \quad \tilde{\psi} = \psi + \omega t. \tag{48}$$

[2] Если (7) справедливо в координатах x^α, то оно тем более справедливо в хронометрических координатах t, r, θ, ψ, поскольку $g^{rr} \sim g^{ii}$, $g^{\theta\theta} \sim g^{\psi\psi} \sim r^{-2}g^{ii}$, $g^{0\psi} \sim \omega g^{00}$.

[3] Когда $u^r = 0, æA > 0$, $g^{rr} < 0$, мы имеем:

$$g^{0r} = -\int r^{-1} g^{0r}\left[æ\mu - æAg^{rr}(\psi_{,r})^2\right] dV \Rightarrow g^{0r} = 0.$$

Величины $\tilde{g}^{\mu\nu}$ могут быть записаны так:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}, \tag{49}$$

что вместе с условием $g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(g^{00}, g^{11}, g^{22}, g^{33})$ дает:

$$\tilde{g}^{00} = g^{00}, \quad \tilde{g}^{rr} = g^{rr}, \quad \tilde{g}^{\theta\theta} = g^{\theta\theta}, \quad \tilde{g}^{0\psi} = \omega g^{00}. \tag{50}$$

Покажем, что, если условие (7) справедливо в координатах с метрикой $g^{\mu\nu}$, то оно будет также справедливо в сферических координатах $\tilde{t}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}$ системы $\tilde{Q}$. С учетом вышеуказанного $\tilde{g}^{\mu\nu}$ (также и в пределах r_0) определяется из (16) в координатах $\tilde{x}^{\alpha}$:

$$\tilde{g}^{\mu\nu}_{P} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{V} \frac{1}{r} (\tilde{R}^{\mu\nu})^{*}\, dV. \tag{51}$$

С учетом этого найдем $\tilde{g}^{0\psi}$ в системе $\tilde{Q}$, в которой материя вращается с угловой скоростью $\omega = \psi_{,0}$, и, поскольку $\tilde{u}^{\psi} = \tilde{u}^{0}\omega$, то из (51), (11) мы получаем:

$$\tilde{g}^{0\psi}_{I} = 2æ \int\limits_{V} \frac{1}{r} \mu_0 (\tilde{u}^{0}\tilde{u}^{\psi} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{0\psi})\, dV = 2æ\Phi \frac{\omega}{C_0^2} - æ\Phi \bar{g}^{0\psi}, \tag{52}$$

и, поскольку из (25) в пределах r_0 мы имеем $æ\Phi \cong 1$ и $\tilde{g}^{0\psi}_{I} = \bar{\tilde{g}}^{0\psi}$, то для $\tilde{g}^{0\psi}_{I}$ мы имеем:

$$\tilde{g}^{0\psi}_{I} = \omega / C_0^2. \tag{53}$$

Из (50) ясно, что (53) соответствует метрике системы отсчета, вращающейся со скоростью ω относительно инерциальной системы. Таким образом, в случае вращения всей материи в системе отсчета, инерциальная система полностью увлекается этим вращением, что и является реализацией принципа Маха [1] в рассматриваемой теории.

7. Классическая механика с принципом Маха

Если в уравнении движения пробной массы в произвольной системе отсчета $\tilde{Q}$

$$-\frac{d\tilde{u}^{\mu}}{ds} = \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \tilde{u}^{\alpha}\tilde{u}^{\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\xi}(\tilde{g}_{\xi\alpha,\beta} + \tilde{g}_{\xi\beta,\alpha} - \tilde{g}_{\alpha\beta,\xi})\tilde{u}^{\alpha}\tilde{u}^{\beta} \tag{54}$$

мы рассмотрим случай нерелятивистских скоростей ($\tilde{u}^{i} \ll 1$) и, с учетом (51), вместо $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и $\tilde{g}_{\mu\nu}$ мы подставим их значения, выраженные через потенциалы от окружающих тел m_a/r_a, $(m_a/r_a)\omega_a$ и т.д, то таким образом мы получим уравнения классической механики в произвольной системе отсчета с учетом принципа Маха. Сравнив их с уравнениями в координатах x^{α} локально инерциальной (в окрестности точки P) системы Q, мы получим условие Маха (в терминах движения окружающих тел), выполнение которого означает, что система отсчета является инерциальной.

Часть значений $\tilde{g}^{\mu\nu}$ мы можем получить, используя вычисленные ранее значения $g^{\mu\nu}$ в x^{α}, переходя от x^{α} к координатам $\tilde{x}^{\alpha}$. Часть значений мы можем получить непосредственно из (51). В координатах t, r, θ, ψ системы Q из (20, (28), (47) мы имеем:

$$g^{00}_{I} = \frac{æ}{C_0^2}\Phi; \quad g^{rr}_{I} = æ\Phi - 2, \quad g^{\theta\theta}_{I} = \frac{æ\Phi - 2}{r^2}, \quad g^{\psi\psi}_{I} = \frac{æ\Phi - 2}{r^2 \sin^2\theta}, \quad g^{0\psi}_{I} = 0, \tag{55}$$

где $\Phi = \sum_a m_a/r_a$. Получим теперь значения $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в координатах $\tilde{x}^\alpha$ (48) вращающейся системы $\tilde{Q}$. Принимая во внимание (см. (49), (50), (51)), что в этом случае $\tilde{g}^{00} = g^{00}$, $\tilde{g}^{rr} = g^{rr}$, $\tilde{g}^{\theta\theta} = g^{\theta\theta}$, мы получаем:

$$\tilde{g}_I^{00} = \frac{æ}{C_0^2}\sum\frac{m_a}{r_a}, \quad \tilde{g}_I^{rr} = æ\sum\frac{m_a}{r_a} - 2, \quad \tilde{g}_I^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}\left(æ\sum\frac{m_a}{r_a} - 2\right). \tag{56}$$

Значения $\tilde{g}^{0\psi}$, $\tilde{g}^{0r}$ и $\tilde{g}^{\psi\psi}$ мы находим из (51). Для $\tilde{g}^{0\psi}$ (см. (53)) и $\tilde{g}^{0r}$ мы имеем:

$$\tilde{g}_I^{0\psi} = æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\frac{\omega_a}{C_0^2}, \qquad \tilde{g}_I^{0r} = æ\sum\frac{m_a}{r_a}\dot{r}_a. \tag{57}$$

В свою очередь для $\tilde{g}^{\psi\psi}$ — из (51):

$$\begin{aligned}\tilde{g}_P^{\psi\psi} &= 2æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\frac{\omega_a^2}{C_0^2} - æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\tilde{g}_a^{\psi\psi} + \bar{\bar{g}}^{\psi\psi}\cdot\frac{æ}{2\pi}\int\frac{A(\varphi_{,i})^2}{r}\,dV \simeq \\ &\simeq 2æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\frac{\omega_a^2}{C_0^2} - æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\tilde{g}_a^{\psi\psi} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\end{aligned}, \tag{58}$$

(поскольку $\bar{\bar{g}}^{\psi\psi} \simeq \bar{g}^{\psi\psi} = g_0^{\psi\psi}$, см. также (27)). Отсюда, допустив с достаточной точностью, что $æ\Phi_a\tilde{g}_a^{\psi\psi} \simeq \tilde{g}_P^{\psi\psi}$, мы имеем:

$$\tilde{g}_I^{\psi\psi} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} + æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\frac{\omega_a^2}{C_0^2}. \tag{59}$$

Найдем теперь компоненты $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (нам надо найти только те компоненты, которые необходимы для уравнений движения при $\mu = \psi$ и $\mu = r$). Из условия $\tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$ мы получаем:

$$\tilde{g}^I_{00} \simeq \frac{\tilde{g}^{\psi\psi}}{\tilde{g}^{00}\tilde{g}^{\psi\psi} - (\tilde{g}^{0\psi})^2} \simeq \frac{C_0^2}{æ\Phi} - \left(æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\omega_a^2\right)r^2\sin^2\theta, \tag{60}$$

$$\tilde{g}^I_{0\psi} \simeq \frac{-\tilde{g}^{0\psi}}{\tilde{g}^{00}\tilde{g}^{\psi\psi} - (\tilde{g}^{0\psi})^2} \simeq -\left(\frac{1}{\Phi}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\omega_a\right)r^2\sin^2\theta, \tag{61}$$

$$\tilde{g}^I_{0r} \simeq \frac{\tilde{g}^{r0}}{\tilde{g}^{\theta\theta}\tilde{g}^{00}} \simeq -æ\sum_a\frac{m_a}{r_a}\dot{r}_a.$$

Выпишем уравнения движения для ψ и r. Допустим, что мгновенная система отсчета $\tilde{Q}$ выбрана таким образом, что пробное тело движется вдоль радиуса r, т.е. $\tilde{u}^\theta = \tilde{u}^\psi = 0$, $\tilde{u}^r \neq 0$. Поскольку $\tilde{u}^r \ll 1$, из (59), (57), (60) уравнение (54) для $\mu = \psi$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}-\frac{d\tilde{u}^\psi}{ds} &\simeq \tilde{u}^0\tilde{u}^r(\tilde{g}^{\psi\psi}\tilde{g}_{\psi0,r} + \tilde{g}^{\psi0}\tilde{g}_{00,r}) + \frac{1}{2}(\tilde{u}^0)^2\tilde{g}_0^{\psi\psi}\tilde{g}_{\psi0,0} = \\ &= 2\tilde{u}^0\tilde{u}^r\cdot\frac{1}{r\Phi}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\omega_a + 2(\tilde{u}^0)^2\cdot\frac{1}{\Phi}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\dot{\omega}_a.\end{aligned} \tag{62}$$

Первый член в (62) — это сила Кориолиса $(2(\dot{r}/r)\cdot\omega)$, второй член — сила, связанная с неравномерностью вращения системы отсчета $(\sim\dot{\omega})$.

Найдем уравнение движения для r. Из (54) (как и ранее, $\tilde{u}^\theta = \tilde{u}^\psi = 0$, $\tilde{u}^r \ll 1$) с необходимой точностью мы имеем:

$$-\frac{d\tilde{u}^r}{ds} = \frac{1}{2}(\tilde{u}^0)^2\tilde{g}^{rr}(2\tilde{g}_{r0,0} - \tilde{g}_{00,r}). \tag{63}$$

Подставляя в (63) значения $\tilde{g}^{rr}$, $\tilde{g}_{r0}$ и $\tilde{g}_{00}$ из (56), (60) мы получаем:

$$-\frac{d\tilde{u}^r}{ds} \simeq \frac{1}{2}(\tilde{u}^0)^2(æ\Phi-2)\left(-2æ\sum_a \frac{m_a}{r_a}\ddot{r}_a+\frac{C_0^2}{æ\Phi^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a^2}\frac{\partial r_a}{\partial r}+2ær\sin^2\theta\sum_a \frac{m_a}{r_a}\omega_a^2\right) \simeq$$
$$\simeq \frac{æ}{C_0^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\ddot{r}_a - \frac{1}{2\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a^2}\frac{\partial r_a}{\partial r} - r\sin^2\theta\left(\frac{æ}{C_0^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\omega_a^2\right), \tag{64}$$

где первый член — сила, связанная с переносным ускорением системы отсчета, второй член — ньютоновская сила тяготения, третий член — центробежная сила. Как и ранее, из второго члена (64) мы имеем $G_0 = C_0^2/2\Phi$ (24).

Из уравнений (62), (64) следует, что условия Маха для инерциальной системы отсчета в локализованной области (в окрестности P) выглядят следующим образом:

$$\sum_a \frac{m_a}{r_a}\dot{\omega}_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r_a}\omega_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r_a}\ddot{r}_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r_a}\omega_a^2 = 0, \tag{65}$$

т.е. инерциальная система — это система, которая, как целое, не ускорена относительно окружающей материи (звезд) [1].

8. Нестатическая средняя метрика

Рассмотрение действительной средней метрики из (14) для однородного и изотропного распределения материи в пределах островной системы радиуса r_0 показывает, что она нестатична:

$$ds^2 = C_0^2\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3n}{2}-2}dt^2 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^n(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\psi^2), \tag{66}$$

где $n = \sqrt{2/3æ}C_0\mu_0^0 t_0$, C_0 — мгновенное (в момент t_0) значение скорости света, μ_0^0 — мгновенное значение плотности μ_0; в (66) материя стационарна в координатах r, θ, ψ. Космологическое расширение островной материи, имеющее порядок $\sim (t/t_0)^n$ следует из (66). Это приведет к смещению спектральных линий, пропорциональному расстоянию (закон Хаббла):

$$H = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dr}\left(\frac{g_{00}}{g_{rr}}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{g_{rr}}{g_{00}}\right)^{1/2}_{,t} = \left(\frac{t_0}{t}\right)(1 - n/4). \tag{67}$$

Полагая $\mu_0^0 = 3\cdot 10^{-31}$ г·см$^{-3}$ (современная оценка средней плотности материи [8]), мы получим $n = 1/3$ и $1 - n/4 = 11/12$. Однако, положив $\mu_0^0 = 1\cdot 2\cdot 10^{-29}$ г·см$^{-3}$, имеем $1 - 3n/4 = 0$, и эволюционировать будет только составляющая метрики g_{ee}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mach E.* Die Machanik in ihrer Entwicklung. 9 Aufl., F.A.Brockhaus, Leipzig, *1933.*
2. *Einstein A.* // Ann. Phys. 55 (*1918*), 241.
3. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, *1955.*
4. *Новаку В.* Введение в электродинамику, М., ИЛ, *1963.*
5. *К.В.Анисович* // Тезисы 7-й Советской гравитационной конференции, Ереван: Изд. Ереванского Университета, 1988. С. 148.
6. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. М., Наука, *1974.*
7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М. Наука, *1979*, т. 2.
8. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* “Гравитация”, М.: Мир, *1977*, т. 1–3.