ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 1 1996
Дискуссионный журнал по проблемам гравитационной физики .... *page 32–37*

АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

НОВЫЙ ПОДХОД В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ВЫСШИХ СПИНОВ

А.А. Леонович

Радиотехнический университет, Минск, Беларусь

Предложен новый подход в релятивистской теории гравитации (РТГ). Фундаментальное динамическое гравитационное поле описывается посредством симметричного тензора второго ранга. Связь между метрикой эффективного риманова пространства-времени и гравитационным полем нелинейная (квадратичная, как у метрики с тетрадой). Постулирован калибровочно- и форминвариантный нелинейный лагранжиан. Предложен новый подход к проблеме энергии-импульса гравитационного поля и путь решения классической проблемы теории высших спинов (спин 2).

Важнейшими понятиями как в классической, так и в квантовой физике являются понятия энергии, импульса и момента импульса. Только в общей теории относительности (ОТО), т. е. в классической теории гравитации, сформулированной Эйнштейном, возникают серьезные трудности в связи с понятием энергии. Корни этих трудностей в принципе эквивалентности, который приводит к геометризации гравитационного поля. Подробный анализ ситуации содержится в работах [1, 2], и мы не будем здесь на этом останавливаться.

ОТО есть пример калибровочной теории, калибровочное поле здесь описывается метрическим тензором [3]. Используя геометрию Римана, можно сформулировать действие Гильберта–Эйнштейна для гравитационного поля. Если интерпретировать эту теорию в терминах частиц, то действие Гильберта–Эйнштейна есть единственное физически состоятельное (калибровочно инвариантное) действие, описывающее самодействующее безмассовое поле спина 2 [4].

Возникает сложная проблема построения физически корректной (нелинейной, калибровочно инвариантной как гравитация Эйнштейна) теории поля самодействующего спина 2 в пространстве-времени Минковского. Это известная классическая проблема энергии-импульса теории высших спинов [3–8].

Между описанием спина 1 и спина 2 существует огромная пропасть, не преодоленная и до настоящего времени [3]. Все известные результаты (квадрупольная формула, например) относятся к линеаризованной теории. Не преувеличивая, скажем, что никто никогда ни в одном теоретико-полевом подходе не получал положительную плотность энергии сильных гравитационных волн. И в этом заключается суть классической проблемы теории высших спинов [3–8]. Отметим, что физическая теория — это не просто уравнения движения. Это — лагранжиан, уравнения движения, тензор энергии-импульса (ТЭИ) и законы сохранения.

Итак, между описанием спина 1 и спина 2 существует огромное различие. Дело в том, что в случае векторного поля символы Кристоффеля сокращаются в тензоре напряженности $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Поэтому для лагранжиана $\sqrt{-g}L = \frac{1}{4}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ элементарно находится ТЭИ Гильберта, который есть вариационная производная от лагранжиана по метрике. Это — хорошо известный максвелловский ТЭИ $T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$. То же можно сказать и о полях Янга-Миллса. То есть проблемы энергии в случае векторных полей (спин 1) не существует, она решается элементарно.

Совершенно иначе обстоит дело в случае тензорных полей (спин 2). Теперь символы Кристоффеля в тензоре напряженности, а значит и в лагранжиане, не сокращаются, и ТЭИ Гильберта содержит вторые производные по полям. Этот факт ведет к принципиальной знаконеопределенности плотности энергии излучения (нет квадратичной структуры), нарушению причинности и т. д., одним словом, к потере физического смысла теории. Это и есть проблема высших спинов. Единственная возможность решить эту проблему, оставаясь в рамках стандартной классической теории поля, это найти такую формулировку теории, в которой вторые производные обращались бы в нуль при выполнении уравнений движения и дополнительных условий. В линейной теории спина 2 в поперечно-бесследовой (TT) калибровке именно так и происходит.

В работе [3] отмечается, что в случае спина 2 не существует выражения для симметричного ТЭИ, которое зависело бы квадратично от полей и их первых производных, т. е. с необходимостью присутствуют вторые производные от полей. Отметим, что это проблема локальной теории поля. И требование положительности плотности энергии излучения — абсолютно необходимое требование к физической теории.

Однако не существует такой общей теоремы, которая бы гарантировала, что не может быть последовательной локальной теории поля спина 2. Предлагаемый подход является дальнейшим развитием концепции и идеологии РТГ [2].

Цель работы:

1. Построение схемы РТГ, основанной на новой системе физических постулатов, утверждений, аксиом. Это различие двух схем соответствует в некоторой степени различию между метрической и тетрадной формулировками эйнштейновской теории гравитации.

2. Развитие подхода к решению классической проблемы энергии-импульса гравитационного поля (спин 2) в рамках предложенной схемы. Установление глубокой аналогии между новым вариантом РТГ и гравитацией Эйнштейна в тетрадной формулировке.

3. Построение симметричного ТЭИ Гильберта для гравитационного поля с учетом уравнений движения.

4. Доказательство положительности плотности энергии гравитационного излучения в пространстве-времени Минковского в предложенной обобщенной TT-калибровке.

При построении теории будем полностью опираться на специальную теорию относительности. В рамках концепции и идеологии РТГ в основу предлагаемого подхода положим следующие физические требования, постулаты или аксиомы.

1. Принцип релятивистской инвариантности. Пространство-время Минковского есть фундаментальное пространство, общее для всех физических полей, включая гравитационное.

2. Гравитационное поле описывается симметричным тензором второго ранга (гравитон). Это поле является реальным физическим полем типа поля Фарадея–Максвелла, обладающим энергией, импульсом и моментом импульса.

3. Принцип геометризации, обеспечивающий универсальное взаимодействие гравитационного поля с веществом. Метрика эффективного риманова пространства-времени определяется гравитационным полем нелинейным образом (квадратичным, как метрика тетрадой)

$$
\begin{aligned}
g^{mn}(x) &= f^{ma}(x) f^{nb}(x) \eta_{ab}(x),\\
g_{mn}(x) &= h_{ma}(x) h_{nb}(x) \eta^{ab}(x),\\
f^{ma} h_{na}(x) &= \delta^m_n,\\
f^{ma} h_{mb}(x) &= \delta^a_b,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\eta_{ab}(x)$ — метрический тензор пространства-времени Минковского, $g_{mn}(x)$ и $g^{mn}(x)$, $h_{ma}(x)$ и $f^{ma}(x)$ — прямой и обратный тензоры, связанные соотношением

$$
\begin{aligned}
f^{ma}(x) &= \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial h_{ma}(x)},\\
\Lambda &= \det |h_m{}^a| = \sqrt{-g}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Все индексы лоренцевские и поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского $\eta_{ab}(x)$.

4. Принцип минимальности — уравнения движения не выше второго порядка. Скалярная плотность лагранжиана гравитационного поля является квадратичной формой полей и их первых ковариантных по метрике Минковского производных.

5. Принцип калибровочной инвариантности, позволяющий однозначно выбрать лагранжиан. Калибровочная инвариантность понимается как в теории Эйнштейна, а не как в теориях Максвелла и Янга–Миллса.

Несколько слов о предлагаемых постулатах. Принцип геометризации в форме 3 диктуется необходимостью корректного включения в теорию взаимодействия гравитационного поля со спинорными полями материи. Отсюда ясна аналогия с тетрадной теорией тяготения [9]. Грубо говоря, мы отождествляем у тетрады оба индекса и сохраняем всю тетрадную технику. О двух различных формулировках линейной теории симметричного тензора ранга 2 в пространстве-времени Минковского см., например, в книге Швингера [10] (линеаризованные версии метрической и тетрадной гравитации). Нелинейная (квадратичная) связь эффективной метрики с гравитационным полем диктуется также, и это самое главное, физическим требованием положительности плотности энергии излучения.

Лагранжиан, а следовательно и ТЭИ должны иметь квадратичную структуру по полям и их производным. Этому требованию удовлетворяет лагранжиан тетрадной гравитации [9]. Метрический лагранжиан Гильберта–Эйнштейна, используемый в обычном подходе РТГ, содержит кубичность в кинетическом члене (квадратичен по первым производным, но имеет нечетную степень по полям) и, следовательно, не может служить основой физической теории. В такой теории принципиально невозможно решение проблемы энергии.

Постулат 4 означает, что фундаментальным динамическим гравитационным полем, обладающим энергией-импульсом и моментом импульса, в предлагаемом подходе является поле $f^{ma}(x)$, а метрика $g_{mn}(x)$ является эффективной, производной, вторичной. Постулаты 1, 2, 5 в рамках РТГ подробно обсуждаются в работах [1, 2].

Теперь приступим к построению лагранжиана, исходя из соображений симметрии, инвариантности. Рассмотрим скалярную кривизну эффективного риманова пространства-времени

$$
R = \frac{1}{\Lambda} D_c(\Lambda f^{ca} \gamma_{ba}{}^b) + \gamma_{abc}\gamma^{cba} - \gamma_a \gamma^a,
\tag{3}
$$

где $\gamma_{abc} = C_{bac} + C_{bca} + C_{acb}$ — аналог коэффициентов вращения Риччи, D_c — ковариантная производная по метрике Минковского.

$$\begin{gathered}\gamma_a = \gamma_{ba}{}^{b}, \quad \gamma_{abc} = -\gamma_{acb}, \\ C_{abc} = \frac{1}{2} f^m{}_a f^n{}_b (D_m h_{nc} - D_n h_{mc}), \quad C_{abc} = -C_{bac}.\end{gathered} \tag{4}$$

Величина ΛR форминвариантна $(\partial_n \longrightarrow D_n)$ и калибровочно инвариантна. Соответствующие калибровочные преобразования нетрудно выписать. Не учитывая в данный момент дивергентные члены, содержащие вторые производные, постулируем лагранжиан гравитационного поля в виде

$$L_g = \frac{c^4}{4\pi æ} \Lambda(\gamma_{abc}\gamma^{cba} - \gamma_a \gamma^a), \tag{5}$$

где L_g содержит только первые производные полей.

Обобщение на случай теории с высшими производными, пространства с кручением и т. д. осуществляется обычным образом. Отметим, что лагранжиан (5) не выражается через риманову метрику. Существенно меняется математическая структура и, что еще более важно, радикально меняется физическое содержание теории.

Уравнения движения для полей получаются как обычно, путем вариаций действия. Производная Лагранжа–Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial L_g}{\partial h_{ma}} - D_b \frac{\partial L_g}{\partial (D_b h_{ma})} = 0. \tag{6}$$

Умножая это уравнение на $f^n{}_a$, придем к известным уравнениям РТГ [2]. Это аналогично переходу от уравнений тетрадной гравитации к уравнениям метрической гравитации [9]. Итак, образно говоря, предлагаемый подход есть "корень квадратный из РТГ". h_{ma} играет роль потенциалов поля, C_{abc} — роль напряженностей поля подобно A_μ и $F_{\mu\nu}$ в теориях Максвелла и Янга–Миллса.

Несомненно, что изложенный подход имеет физический смысл. Возникает нетривиальный вопрос, как фиксировать теорию. Необходимы выбор независимых динамических переменных и 10 дополнительных уравнений — аналог калибровки тетрад, которые полностью фиксируют теорию, устраняя из нее функциональный произвол в решениях и определяя физический сектор теории.

Симметрический ТЭИ Гильберта получим, используя разработанный ранее способ исследования лагранжевых теорий с помощью производой Ли от лагранжиана [11]. При выполнении уравнений движения (6) после некоторых преобразований получим для ТЭИ Гильберта следующее выражение

$$\begin{gathered}T^{ab} = \frac{1}{2}\frac{c^4}{4\pi æ} D_m D_n \left\{\Lambda[(f^{ab} + f^{ba}) f^{mn} - f^{am} f^{nb} - f^{bm} f^{na}]\right\}, \\ D_a T^{ab} \equiv 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что полученное выражение (7) не имеет никакого отношения к псевдотензорам энергии-импульса в метрической и комплексам энергии-импульса в тетрадной теориях гравитации. Ковариантные производные в (7) действуют и на первый, и на второй индекс f^{ma}. Лагранжиан (5) на уравнениях движения (6) равен дивергенции, так как $R = 0$. И этот факт присущ только теории спина 2. Ни в теории скалярного поля $(s = 0)$, ни в теориях Максвелла и Янга–Миллса $(s = 1)$ такая ситуация не встречается. В качестве гипотезы выдвинем предположение, что эта дивергенция равна энтропии гравитационного поля.

А теперь рассмотрим дальнейшее принципиальное развитие теории.

1. В качестве независимых переменных выбираем $\widetilde{f}^{ma} = \sqrt{\Lambda} f^{ma}$, $\widetilde{f}^{ma}(x) = \widetilde{\eta}^{ma}(x) + \widetilde{\varphi}^{ma}(x)$. Переформулируем лагранжиан (5) и, следовательно, всю теорию (уравнения движения (6), ТЭИ (7)) в терминах новых переменных подобно тому тому, как ОТО [12] и известный вариант РТГ [2] формулируются в терминах $\widetilde{g}^{mn}(x) = \sqrt{-g} g^{mn}(x)$.

2. $\widetilde{f}^{ma}(x)$ — симметричный тензор 2-го ранга. $\widetilde{f}^{ma}(x) - \widetilde{f}^{am}(x) = 0$ — аналог шести калибровочных условий для тетрады.

3. $D_m \widetilde{f}^{ma}(x) = 0$ — четыре полевых уравнения, определяющих вырезание спина 2 и полностью фиксирующих теорию. В известном варианте РТГ [2] используются полевые уравнения $D_m \widetilde{g}^{mn}(x) = 0$.

4. ТЭИ Гильберта поля $\widetilde{f}^{ma}(x)$ на уравнениях движения равен (7).

В новых переменных лагранжиан (5) представляет собой однородную функцию степени 0 относительно "координат" $\widetilde{f}^{mn}(x)$ и степени 2 относительно "скоростей" $D_c \widetilde{f}^{mn}(x)$ (соотношения Эйлера [13–15]).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_g}{\partial \widetilde{f}^{ma}} \widetilde{f}^{ma} &= 0, \\ \frac{\partial L_g}{\partial (D_c \widetilde{f}^{ma})} D_c \widetilde{f}^{ma} &= 2 L_g. \end{aligned} \tag{8}$$

Этот факт нам представляется весьма важным при рассмотрении проблемы энергии (выбор независимых динамических переменных).

Рассмотрим произвольное гравитационное излучение (две динамические степени свободы [16], общий нелинейный случай) в обобщенной ТТ-калибровке в декартовых координатах пространства-времени Минковского

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{ma} \widetilde{f}^{ma} = 4 \text{ — 1 условие — отсутствие скалярного поля в излучении;} \\ \widetilde{f}^{00} = 1 \text{ — 1 условие;} \\ \widetilde{f}^{0i} = A^i, \quad \left. \begin{array}{c} \operatorname{div} \bar{A} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{A} = 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow \Delta \bar{A} = 0 \text{ — 3 условия (вектор } \bar{A} \text{ — гармонический);} \\ \partial_0 \widetilde{f}^{0j} + \partial_i \widetilde{f}^{ij} = 0 \text{ — 3 условия вследствии } \partial_m \widetilde{f}^{ma} = 0. \end{array} \right. \tag{9}$$

Итого 8 условий обобщенной ТТ-калибровки. Нетрудно видеть отличие предложенной обобщенной ТТ-калибровки в нелинейном случае ($\widetilde{f}^{0i}$ — гармонический 3-вектор) от классической ТТ-калибровки в линеаризованной теории ($\widetilde{f}^{0i} = 0$).

В результате имеем строго положительную определенность плотности энергии гравитационного излучения в пространстве-времени Минковского

$$T^{00} = \frac{1}{2} \frac{c^4}{4\pi æ} \partial_i \partial_j (\widetilde{f}^{0i} \widetilde{f}^{0j} - \widetilde{f}^{00} \widetilde{f}^{ij}) = \frac{c^4}{4\pi æ} (\partial_i A_j + \partial_j A_i)(\partial_k A_l + \partial_l A_k) \eta^{ik} \eta^{jl} > 0. \tag{10}$$

Полученный результат может рассматриваться как решение проблемы. Представляет интерес, что классическая проблема энергии-импульса теории высших спинов (спин 2) может быть решена столь минимальными средствами [17].

Отметим, что предложенный подход не есть биметризм, хотя элементы биметризма в теории проявляются, так как есть эффективное риманово пространство-время. Исходными структурами в теории служат $\eta^{ma}(x)$ и $\widetilde{f}^{ma}(x)$ — метрика Минковского и симметричный тензор второго ранга. Все остальные объекты в теории (эффективное риманово пространство-время, лагранжиан, уравнения движения, ТЭИ) строятся из $\eta^{ma}(x)$ и $\widetilde{f}^{ma}(x)$.

В предлагаемом подходе сохранены все достоинства ОТО (универсальность взаимодействия, калибровочная инвариантность и т. д.) и полностью реализованы концепция и идеология РТГ (поле спина 2 в духе Фарадея–Максвелла, законы сохранения энергии-импульса и т. д.).

В рассмотренной схеме можно получить точное решение уравнений в задаче Шварцшильда.

Нерешенным остается вопрос о непротиворечивости дополнительных условий и обобщенной ТТ-калибровки с уравнениями Эйнштейна. В книге [16] отмечается совместность гармонических калибровочных условий и уравнений Эйнштейна.

В предложенной обобщенной ТТ-калибровке (9) условие гармоничности 3 вектора $\overline{A}$ ($\Delta\overline{A} = 0$) следует рассматривать как избыточное калибровочное условие, так как нас интересует подкласс решений этого уравнения, а именно $\mathrm{div}\overline{A} = 0, \mathrm{rot}\overline{A} = 0$.

В качестве гипотезы сделаем предположение о возможности излучения в данной теории сферически симметричных гравитационных волн с переносом энергии, т. е. об отсутствии аналога теоремы Биркгофа в новом варианте РТГ. Представляет интерес квантование теории в переменных $\tilde{f}^{mn}$.

В заключение автор выражает искреннюю признательность академику А.А. Логунову за интерес и внимание к работе. Автор благодарит профессора М.А. Мествиришвили за многочисленные плодотворные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов В.И., Логунов А.А.* Современные проблемы математики. Итоги науки и техники, ВИНИТИ, М., *1982*, Т. 21.
2. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Релятивистская теория гравитации, "Наука", М., *1989.*
3. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время, "Мир", М., *1987.*
4. *Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В.* Современные проблемы гравитации. Сборник трудов II Советской гравитационной конференции. Тбилиси, *1967.*
5. *Leonovich A.A.* In Problems on High Energy Physics and Field Theory, Proceedings of the 14-th Workshop, Protvino, 1991, "Nauka", M., *1992.*
6. *Леонович А.А.* Труды семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны", ОИЯИ Р2-92-12, Дубна, 1992. ОИЯИ Р2-92-559, Дубна, *1993.* ОИЯИ Р2–94–150, Дубна, 1994.
7. *Vasiliev M.A.* Higher-spin gauge theories. Preprint Lebedev Physical Institute № 132, Moscow *1991.*
8. *Леонович А.А.* Гравитация, т.1, вып. 1, *1995.*
9. *Родичев В.И.* Теория тяготения в ортогональном репере, "Наука", М., *1974.*
10. *Швингер Ю.* Частицы, источники, поля. "Мир", М., *1973.*
11. *Барбашов Б.М., Леонович А.А., Пестов А.Б.* Препринт ОИЯИ Р2-82-151, Дубна, *1982*; ЯФ, *1983*, 38, Вып. 1 (7), С. 261–263.
12. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения, "Физ-мат", М., *1961.*
13. *Меллер К.* Теория относительности, "Атомиздат", М., *1975.*
14. *Эддингтон А.* Математическая теория относительности, Харьков–Киев, *1933.*
15. *Шредингер Э.* Пространственно-временная структура Вселенной, "Наука", М., *1986.*
16. Общая теория относительности, Сб. статей под редакцией Я.А. Смородинского и В.Б. Брагинского, "Мир", М., *1983.*
17. *Leonovich A.A., Mladenov D.M.* International Workshop Symmetry Methods in Physics. In Memory of Prof. Ya.A. Smorodinsky. Dubna, Russia, July 6–10, *1993.* Dubna *1994*, Vol. 1, P. 288–290.