ГРАВИТАЦИЯ Том 1 Выпуск 1 1995
Дискуссионный журнал по проблемам гравитационной физики .... page 27–38

ЭНЕРГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

ПРОБЛЕМА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А.А. Леонович

Предложен новый подход к проблеме энергии-импульса гравитационного поля и выдвинут принцип двойственности в теории тяготения Эйнштейна. Установлена глубокая аналогия между гравитацией Эйнштейна и электродинамикой Максвелла. Определены интегралы по двумерным гиперповерхностям, характеризующие физические свойства источников гравитационного поля (M и N, j и a) и обобщающие известные интегралы Комара в теории черных дыр. Предложен тензор «энергии-импульса» гравитационного поля с положительно определенной плотностью «энергии», установлены глобальные законы сохранения.

Содержание

1. Принцип двойственности и способ локализации «энергии-импульса» гравитационного поля в общей теории относительности

Важнейшими понятиями, как в классической, так и в квантовой физике являются понятия энергии, импульса и момента импульса. Только в общей теории относительности, т. е. в классической теории гравитации, сформулированной Эйнштейном, возникают серьезные трудности в связи с понятием энергии. Корни этих трудностей в принципе эквивалентности, который приводит к геометризации гравитационного поля. Главная проблема — проблема законов сохранения и сохраняющихся величин в теории тяготения Эйнштейна. Подробный анализ ситуации содержится в работах [1, 2], и мы не будем здесь на этом останавливаться. Отметим лишь, что были затрачены огромные усилия, чтобы извлечь из римановой геометрии (гравитации Эйнштейна) положительно определенную величину и назвать ее массой (энергией). Вспомним хотя бы тензор суперэнергии Беля–Робинсона [1]. В настоящее время наиболее полезными выражениями для сохраняющихся величин представляются, видимо, те, которые даны Комаром [3], и лежащие в основе термодинамики черных дыр [4, 5]. Интегралы Комара определяют массу M и угловой момент j черной дыры с помощью векторов Киллинга.

Уравнения Эйнштейна имеют вид

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

Если выполняются уравнения движения материи $[L_m] = 0$, то для тензора энергии-импульса материи $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. При наличии векторных полей Киллинга

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \tag{1.2}$$

имеем интегральные законы сохранения

$$K = \int K^\mu T_{\mu\nu}\, d^3\Sigma^\nu, \tag{1.3}$$

физическая интерпретация которых зависит от геометрических свойств соответствующих полей Киллинга. Отметим фундаментальную роль векторов Киллинга для определения глобальных законов сохранения в общей теории относительности.

Теперь перейдем к главной из рассматриваемых здесь проблем, т. е. к проблеме гравитационной энергии. В случае гравитационных лагранжианов имеем тождество $\nabla^\mu G_{\mu\nu} \equiv 0$, однако построить интегральные законы сохранения как для материи не представляется возможным.

Рассмотрим

$$X = \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} G_{\mu\nu}, \quad K^2 = g^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta \neq 0, \tag{1.4}$$

где $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2$ — тензор Эйнштейна, K_μ — неизотропный вектор Киллинга. Величина X имеет смысл средней скалярной кривизны трехмерного подпространства, ортогонального заданному вектору K_μ [6]. Примечательно, что исходная формула (1.4) в наших построениях имеет ясный геометрический смысл.

Применяя к X производную Ли вдоль вектора Киллинга K_μ, получим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} L_k X &= K^\mu \nabla_\mu X = \nabla^\mu \nabla^\nu Y_{\mu\nu} \equiv 0, \\ Y_{\mu\nu} &= \nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu + \frac{K_\mu \nabla_\nu K^2 - K_\nu \nabla_\mu K^2}{K^2}, \quad Y_{\mu\nu} = -Y_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{1.5}$$

и определим интегралы [7]

$$M = \oint Y_{\mu\nu}\, d^2\Sigma^{\mu\nu}, \tag{1.6}$$

$$N = \oint \widetilde{Y}_{\mu\nu}\, d^2\Sigma^{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

где $\widetilde{Y}_{\mu\nu}$ — тензор дуальный к $Y_{\mu\nu}$. Первое слагаемое в формуле (1.6) вследствие выражения (1.5) для $Y_{\mu\nu}$ отвечает известному интегралу Комара [3]. Очевидна аналогия с определением электрического и магнитного зарядов в электродинамике.

В случае уравнений Максвелла

$$Q = \oint F_{\mu\nu}\, d^2\Sigma^{\mu\nu} \text{ — электрический заряд,} \tag{1.8}$$

$$P = \oint \widetilde{F}_{\mu\nu}\, d^2\Sigma^{\mu\nu} \text{ — магнитный заряд,} \tag{1.9}$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля.

Для метрики Тауба-НУТ [8] в соотношениях (1.6), (1.7) M и N — гравитационные массы «электрического» и «магнитного» типов для времениподобного вектора Киллинга. Пространственноподобный K_μ дает для (1.6) и (1.7) соответственно угловой момент источника j и его ускорение a [8].

Таким образом, интегралы (1.6), (1.7) по двумерным гиперповерхностям, характеризующие физические свойства источников гравитационного поля, позволяют выдвинуть принцип двойственности в теории тяготения Эйнштейна. Согласно этому принципу каждому вектору Киллинга отвечают две физические характеристики источника гравитационного поля, находящиеся по отношению друг к другу в двойственной (дуальной) симметрии, как, например, M и N, j и a. В электродинамике Максвелла двойственность связана только с двумя величинами — электрическим и магнитным зарядами. Отметим, что принцип двойственности играет фундаментальную роль в геометрии, топологии, математической физике.

Представляет несомненный интерес построить термодинамику черных дыр [4, 5] и получить соотношения типа Хоукинга на основе интегралов (1.6) и (1.7), принципиальным образом обобщающих известные интегралы Комара.

Так как аналогия между теорией гравитации и электродинамикой пока кажется результативной, естественно искать выражение для тензора напряжений гравитационного поля, вновь руководствуясь аналогией с электродинамикой. Тензор

$$-N_{\mu\nu} = Y_{\mu\alpha} Y_{\nu.}^{\ \alpha} - \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu} Y_{\alpha\beta} Y^{\alpha\beta}, \tag{1.10}$$

для которого

$$\nabla^\nu (K^\mu N_{\mu\nu}) = 0, \quad N_{00} > 0, \quad K = \int K^\mu N_{\mu\nu}\, d^3\Sigma^\nu, \tag{1.11}$$

естественно рассматривать в качестве тензора «энергии-импульса» гравитационного поля с положительно определенной локальной плотностью «энергии». Соотношения (1.10), (1.11) позволяют сформулировать критерий гравитационного излучения подобно тому, как это делается в электродинамике [3].

Предложенный подход справедлив не только для энштейновского лагранжиана $L_g = R$, но так же для любых гравитационных лагранжианов. Это особенно важно в связи с тем, что в квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени мы имеем дело с эффективным гравитационным лагранжианом, содержащим высшие поправки по кривизне [9, 10]. Рассмотренный формализм имеет место при любом тензоре энергии-импульса материи, т. е. при любой правой части уравнений Эйнштейна (1.1), а связь законов сохранения энергии-импульса материи и гравитационного поля осуществляется посредством уравнений Киллинга.

Обратим внимание на то, что интеграл Комара, являющийся основой существующей теории черных дыр [5], не позволяет в принципе определить «магнитную» гравитационную массу подобно тому, как в электродинамике существование векторного потенциала приводит к отсутствию магнитного заряда.

2. Полиномиализация действия Эйнштейна–Гильберта

Доказано, что в переменных $\overline{g}^{\mu\nu} = (-g)^k g^{\mu\nu}$, где $k = \frac{5}{2(2n+1)}$, n — размерность пространства-времени, действие Эйнштейна–Гильберта становится полиномиальным. Предложено калибровочное условие $\partial_\mu \overline{g}^{\mu\nu} = 0$.

Как было открыто Янгом и Миллсом [11], можно обобщить теорию Максвелла введением системы заряженных частиц спина 1, описываемых матричным потенциалом A_μ. В результате действие Янга-Миллса имеет следующую полиномиальную структуру

$$S_{Y-M} = \partial A\, \partial A + gA^2\, \partial A + g^2 A^4, \quad g \text{ — константа связи.} \tag{2.1}$$

Общая теория относительности есть другой пример калибровочной теории [11]. Калибровочное поле здесь описывается метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. Используя геометрию Римана, можно легко сформулировать действие Эйнштейна–Гильберта для гравитационного поля

$$S = -\frac{1}{4æ^2} \int R\sqrt{-g}\, d^n x, \quad g = \det |g_{\mu\nu}|. \tag{2.2}$$

Если интерпретировать эту теорию в терминах частиц, то действие Эйнштейна–Гильберта единственное состоятельное (калибровочно инвариантное) действие, описывающее самодействующее безмассовое поле спина 2. Но теперь в отличие от (2.1) выражение (2.2) неполиномиально, т. е. представляет собой бесконечный ряд по переменным $h_{\mu\nu}$ и их производным $\partial_\lambda\, h_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + æh_{\mu\nu}$. И это имеет место во всех известных переменных. Аштекер [12] исследует полиномиальность уравнений движения и связей, но это не есть полиномиальность действия, а значит и всей теории.

Введем тензорные плотности веса $-2k$ и $2k$, соответственно:

$$\begin{aligned} \overline{g}^{\mu\nu} &= (-g)^k g^{\mu\nu}, \\ \overline{g}_{\mu\nu} &= (-g)^{-k} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

и переформулируем то же действие Эйнштейна–Гильберта в терминах независимых величин $\overline{g}^{\mu\nu}$, при этом в случае гармонических переменных $k = 1/2$ [13].

После некоторых вычислений найдем

$$R\sqrt{-g} = (\det \overline{g}^{\mu\nu})^q P(\overline{g}^{\mu\nu},\, \partial_\lambda\, \overline{g}^{\mu\nu}), \quad q = -2 - \frac{1-2k}{2(1-nk)}, \tag{2.4}$$

где $P(\overline{g}^{\mu\nu}, \partial_\lambda \overline{g}^{\mu\nu})$ имеет полиномиальную структуру. Теперь ясно, что вся проблема заключена в факторе $(\det \overline{g}^{\mu\nu})$. Если $q = 0, 1, 2, \ldots$, то действие Эйнштейна–Гильберта становится полиномиальным. Бесконечный ряд в новых переменных (2.3) перегруппировался и свернулся в конечный ряд, произошла своеобразная перенормировка бесконечного ряда. Мы рассмотрим минимальную степень в (2.4), т. е. $q = 0$, $k = 5/(2(2n+1))$. Например, в 4-х измерениях $k = 5/18$. Используя разложение $\overline{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}$, где $\eta^{\mu\nu} = (+\,-\,-\,-)$ метрика Минковского, для действия Эйнштейна–Гильберта получим следующую полиномиальную форму [14], как у нелинейной сигма-модели

$$R\sqrt{-g} = \partial\varphi\, \partial\varphi + \varphi\, \partial\varphi\, \partial\varphi + \ldots + \varphi^7\, \partial\varphi\, \partial\varphi. \tag{2.5}$$

Вместо метрики Минковского $\eta^{\mu\nu}$ может быть использовано любое фоновое поле.

Отметим, что в квантовой гравитации [15] часто используются в качестве независимых переменных тензорные плотности вида (2.3), но никто не обнаружил, что при определенном значении k действие Эйнштейна–Гильберта становится полиномиальным.

Таким же путем получим полиномиальную структуру тетрадной гравитации Эйнштейна. Используя аналогичный подход к топологическим инвариантам Понтрягина, Эйлера–Пуанкаре и дифференциально-геометрическим инвариантам Черна–Саймонса, в результате найдем, что они так же имеют полиномиальную структуру. Сделаем предположение, что полиномиальность тесно связана с проблемой энергии и гипотезой о положительности евклидова действия [15].

Теперь естественно предложить следующее калибровочное условие $\partial_\mu \overline{g}^{\mu\nu} = 0$ вместо обычно используемого условия $\partial_\mu \widetilde{g}^{\mu\nu}$, где $\widetilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$, так как в гармонических переменных теория неполиномиальна.

Возникает исключительно сложная проблема построения физически состоятельной (нелинейной, калибровочно инвариантной, как гравитация Эйнштейна, и полиномиальной) теории поля самодействующего спина 2 в пространстве-времени Минковского. Это хорошо известная классическая проблема энергии-импульса теории высших спинов [11, 15, 16, 23, 32].

3. Новый подход в релятивистской теории гравитации РТГ и путь решения классической проблемы теории высших спинов (спин 2)

Предложен новый подход в РТГ. Фундаментальное динамическое гравитационное поле описывается посредством несимметричного тензора второго ранга. Связь между метрикой эффективного риманова пространства-времени и гравитационным полем нелинейная (квадратичная, как у метрики с тетрадой). Постулирован калибровочно- и форминвариантный нелинейный лагранжиан.

Из всех авторов один Пенроуз [11] отмечает суть проблемы высших спинов. А именно, в случае спина 2 не существует выражения для симметричного тензора энергии-импульса (ТЭИ), которое зависело бы квадратично от полей и их первых производных. То есть, симметричный ТЭИ поля спина 2 с необходимостью содержит вторые производные от полей. Это приводит к принципиальной знаконеопределенности плотности энергии излучения (нет квадратичной структуры) и, значит, отсутствию физического смысла. Гамильтонов подход ничего не дает для проблемы спина 2. Отметим, что это проблема локальной теории поля. И требование положительности плотности энергии излучения — абсолютно необходимое физическое требование к теории. Единственная возможность решения проблемы энергии спина 2 — это найти такую формулировку теории, когда вторые производные из выражения для плотности энергии исключаются уравнениями движения, которые также второго порядка. Не существует общей теоремы, гарантирующей, что не может быть последовательной локальной теории поля спина 2. Предлагаемый подход является альтернативной теорией гравитации по отношению к ОТО.

Цель работы:

1. Построение схемы РТГ, основанной на новой системе физических постулатов (аксиом). Это различие двух схем соответствует в некоторой степени различию между метрической и тетрадной формулировками эйнштейновской теории гравитации.

2. Развитие подхода к решению классической проблемы энергии-импульса гравитационного поля (спин 2) в рамках предложенной схемы. Установление глубокой аналогии между новым вариантом РТГ и гравитацией Эйнштейна в тетрадной формулировке.

3. Построение симметричного тензора энергии-импульса Гильберта для гравитационного поля с учетом уравнений движения.

При построении теории будем полностью опираться на специальную теорию относительности. В рамках концепции и идеологии РТГ [17, 18] в основу предлагаемого подхода положим следующие физические требования, постулаты или аксиомы.

1. Принцип релятивистской инвариантности. Пространство-время Минковского есть фундаментальное пространство, общее для всех физических полей, включая гравитационное.

2. Гравитационное поле описывается тензором второго ранга, имеющим симметричную и антисимметричную части (гравитон, гравискаляр, гравифотон). Это поле является реальным физическим полем типа поля Фарадея–Максвелла, обладающим энергией, импульсом и моментом импульса.

3. Принцип геометризации, обеспечивающий универсальное взаимодействие гравитационного поля с веществом. Метрика эффективного риманова пространства определяется гравитационным полем нелинейным (квадратичным) образом

$$
\begin{aligned}
&g^{mn}(x) = f^{ma}(x) f^{nb}(x) \eta_{ab}(x), \\
&g_{mn}(x) = h_{ma}(x) h_{nb}(x) \eta^{ab}(x), \\
&f^{ma}(x) h_{na}(x) = \delta^m_n, \\
&f^{ma}(x) h_{mb}(x) = \delta^a_b, \\
&h_{ma}(x) = \eta_{ma}(x) + \Phi_{ma}(x),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $\eta_{ab}(x)$ — метрический тензор пространства Минковского, $g_{mn}(x)$ и $g^{mn}(x)$, $h_{ma}(x)$ и $f^{ma}(x)$ — прямой и обратный тензоры, связанные соотношением

$$
\begin{aligned}
f^{ma}(x) &= \partial \ln \Lambda / \partial\, h_{ma}(x), \\
\Lambda &= \det |h_{m.}{}^{a}| = \sqrt{-g}.
\end{aligned}
$$

Все индексы лоренцевские и поднимаются и опускаются с помощью $\eta_{ab}(x)$.

4. Принцип минимальности — уравнения движения не выше второго порядка. Скалярная плотность лагранжиана гравитационного поля является квадратичной формой полей и их первых ковариантных по метрике Минковского производных.

5. Принцип калибровочной инвариантности, позволяющий однозначно выбирать лагранжиан. Калибровочная инвариантность понимается как в теории Эйнштейна, а не как в теориях Максвелла и Янга–Миллса.

Несколько слов о предлагаемых постулатах. Принцип геометризации в форме 3 диктуется необходимостью корректного включения в теорию взаимодействия гравитационного поля со спинорными полями материи. Отсюда ясна аналогия с тетрадной теорией тяготения [19]. Грубо говоря, мы отождествляем у тетрады оба индекса и сохраняем всю тетрадную технику. О двух различных формулировках линейной теории симметричного тензора 2-го ранга в пространстве-времени Минковского см., например, в книге Швингера [20]. Нелинейная (квадратичная) связь эффективной метрики g_{mn} с гравитационным полем Φ_{mn} диктуется также, и это самое главное, физическим требованием положительности плотности энергии излучения поля Φ_{mn}. Лагранжиан, а следовательно и тензор энергии-импульса должны иметь квадратичную структуру по полям и их производным. Этому требованию удовлетворяет лагранжиан тетрадной гравитации [19]. Метрический лагранжиан Гильберта–Эйнштейна, используемый в обычном подходе РТГ [18], содержит кубичность в кинетическом члене (квадратичен по первым производным, но имеет нечетную степень по полям) и, следовательно, не может служить основой физической теории. В такой теории нет знака кинетической энергии. Постулат 4 означает, что фундаментальным динамическим гравитационным полем в нашей теории, обладающим энергией и импульсом, является поле Φ_{mn}, а метрика является эффективной, производной, вторичной. Постулаты 1 и 5 в рамках РТГ подробно обсуждаются в работах [17, 18].

Теперь приступим к построению лагранжиана, исходя из соображений симметрии, инвариантности. Рассмотрим скалярную кривизну эффективного риманова пространства

$$
R = \frac{1}{\Lambda} D_\sigma (\Lambda\, f^{\sigma a}\, \gamma_{ba.}{}^{b}) + \gamma_{abc}\, \gamma^{cba} - \gamma_a\, \gamma^a, \tag{3.2}
$$

где $\gamma_{abc} = C_{bac} + C_{bca} + C_{acb}$ — аналог коэффициентов вращения Риччи,

$$\gamma_b = \gamma_{ab.}{}^{a}, \quad \gamma_{abc} = -\gamma_{acb},$$
$$C_{abc} = \frac{1}{2} f^m_{.a} f^n_{.b} (D_m h_{nc} - D_n h_{mc}), \quad C_{abc} = -C_{bac}.$$

Величина ΛR форминвариантна ($\partial_n \to D_n$) и калибровочно инвариантна. Не учитывая в данный момент дивергентные члены, содержащие вторые производные, постулируем лагранжиан гравитационного поля в виде

$$L_g = \frac{c^4}{4\pi\kappa} \Lambda(\gamma_{abc}\gamma^{cba} - \gamma^a \gamma_a), \tag{3.3}$$

где L_g содержит только первые производные полей. Обобщение на случай теории с высшими производными, пространства с кручением и т. д. осуществляется обычным образом. Отметим, что лагранжиан L_g (3.3) не выражается через метрику g_{mn}. Существенно меняется математическая структура, и, что еще более важно, радикально меняется физическое содержание теории.

Уравнения движения для полей Φ_{mn} получаются, как обычно, путем вариации действия. Производная Лагранжа–Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial L_g}{\partial h_{ma}} - D_\sigma \frac{\partial L_g}{\partial (D_\sigma h_{ma})} = 0. \tag{3.4}$$

Умножая эти уравнения на $f^n{}_a$, придем к известным уравнениям РТГ [18]. Это аналогично переходу от уравнений тетрадной гравитации к уравнениям метрической гравитации [19]. Итак, образно говоря, предложенный подход есть «корень квадратный из РТГ». h_{ma} играет роль потенциалов гравитационного поля, C_{abc} — роль напряженностей поля подобно A_μ и $F_{\mu\nu}$ в теориях Максвелла и Янга–Миллса.

Несомненно, что предложенная теория имеет физический смысл. Возникает нетривиальный вопрос, как фиксировать теорию (необходимы 10 дополнительных уравнений — аналог калибровки тетрад, которые полностью фиксируют теорию, устраняя из нее функциональный произвол в решениях и определяя физический сектор).

Симметрический тензор энергии-импульса Гильберта получим, используя разработанный ранее способ исследования лагранжевых теорий с помощью производной Ли от лагранжиана [21]. При выполнении уравнений движения (3.4) после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} T^{ab} &= \frac{1}{2}\frac{c^4}{4\pi\kappa} D_m D_n \left\{ \Lambda \left[(f^{ab} + f^{ba}) f^{mn} - f^{am} f^{nb} - f^{bm} f^{na} \right] \right\}, \\ D_a T^{ab} &\equiv 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Отметим, что полученное выражение (3.5) не имеет никакого отношения к псевдотензорам как в метрической, так и в тетрадной гравитации.

Для гравитационных волн Переса [22]

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \varphi(t-x, y, z)(dt - dx)^2, \quad \Lambda = 1,$$

где φ — гармоническая по переменным y, z функция,

$$g^{mn} = \begin{vmatrix} 1-\varphi & -\varphi & 0 & 0 \\ -\varphi & -(1+\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad f^{ma} = \begin{vmatrix} \sqrt{1-\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varphi}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$T_{00} = \frac{c^4}{4\pi\kappa} \frac{\varphi_y^2 + \varphi_z^2}{4(1-\varphi)^{3/2}} > 0. \tag{3.7}$$

Таким же образом получаем положительную плотность энергии гравитационных волн Бонди, Такено [1]. Нетривиальность ситуации в том, что на уровне метрики есть две степени свободы (эффективный гравитон), а на уровне гравитационного поля — четыре динамические степени свободы (истинные гравитон, гравискаляр, гравифотон), которые в дальнейшем должны квантоваться. В линейном приближении «выживает» только гравитон.

Отметим, что предлагаемый подход не есть биметризм, хотя элементы биметризма в теории проявляются, так как есть эффективное риманово пространство-время. Исходными структурами в теории служат η^{mn} и f^{mn} — метрика Минковского, и несимметричный тензор второго ранга. Все остальные объекты в теории (эффективное риманово пространство-время, лагранжиан, уравнения движения, тензор энергии-импульса) строятся из η^{mn} и f^{mn}.

Между описанием спина 1 и спина 2 существует огромная пропасть, не преодоленная до настоящего времени. Не преувеличивая, скажем, что никто никогда ни в одном теоретико-полевом подходе не получал положительную плотность энергии сильных гравитационных волн. И в этом заключается суть классической проблемы теории высших спинов [23].

А теперь рассмотрим дальнейшее принципиальное развитие теории и решение проблемы энергии-импульса поля спина 2 в рамках нового подхода в РТГ.

1. В качестве независимых переменных выбираем $\widetilde{f}^{\mu\nu}(x)$. Переформулируем лагранжиан (3.3) и, следовательно, всю теорию (уравнения движения (3.4), ТЭИ (3.5)) в терминах новых переменных $\widetilde{f}^{\mu\nu}(x)$, подобно тому, как известный вариант РТГ [18] формулируется в терминах $\widetilde{g}^{\mu\nu}(x)$.

2. $\widetilde{f}^{\mu\nu}(x)$ — симметричный тензор 2-го ранга. $\widetilde{f}^{\mu\nu}(x) - \widetilde{f}^{\nu\mu}(x) = 0$ — аналог шести калибровочных условий для тетрады.

3. $\mathcal{D}_\mu(\widetilde{f}^{\mu\nu}(x) + a\eta^{\mu\nu}\widetilde{f}(x)) = 0$ — четыре полевых уравнения, определяющих вырезание спина 2 и полностью фиксирующих теорию. В известном варианте РТГ используется условие $\mathcal{D}_\mu\widetilde{g}^{\mu\nu}(x) = 0$. Единственный теоретически не определенный числовой коэффициент в теории $a \neq 0$ может быть фиксирован, например, физическим принципом соответствия или $E = -mc^2$ для статического поля точечной массы.

4. ТЭИ поля $\widetilde{f}^{\mu\nu}(x)$ на уравнениях движения равен (3.5). Рассмотрим произвольное гравитационное излучение (общий нелинейный случай) в обобщенной ТТ–калибровке $\psi^{00} = 1$, $\psi^{0i} = 0$, $\partial_i\psi^{ij} = 0$, т. е. семь условий как в линейном случае

$$\psi^{\mu\nu}(x) = \widetilde{f}^{\mu\nu}(x) + a\eta^{\mu\nu}\widetilde{f}(x), \quad \widetilde{f}(x) = \eta_{\alpha\beta}\widetilde{f}^{\alpha\beta}(x), \quad \partial_\mu\psi^{\mu\nu} = 0 \tag{3.8}$$

и одно восьмое условие нелинейное (в линейном случае оно переходит в отсутствие скалярного поля в излучении). В результате имеем строго положительную плотность энергии излучения

$$T^{00} = \frac{1}{2}\frac{c^4}{4\pi\kappa}\,a^2(\partial_i\widetilde{f})(\partial_j\widetilde{f})\eta^{ij} > 0. \tag{3.9}$$

Полученный результат может рассматриваться как решение проблемы. Представляет интерес, что классическая проблема энергии-импульса теории высших спинов может быть решена столь минимальными средствами.

В предложенном подходе сохранены все достоинства ОТО (универсальность взаимодействия, калибровочная инвариантность и т. д.) и реализована идеология РТГ (поле спина 2 в духе Фарадея–Максвелла, законы сохранения и т. д.).

4. Максвеллизация тензора энергии-импульса Гильберта для динамического кручения в геометрии Римана-Картана

Установлено, что тензор энергии-импульса Гильберта для динамического кручения с лагранжианом $L = L(g_{\alpha\beta}, \widetilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta})$ становится на уравнениях движения максвелловского (янг-миллсовского) вида. Это есть решение классической проблемы энергии-импульса теории высших спинов (спин 2 — торсионный гравитон).

Как уже отмечалось ранее, между описанием спина 1 и спина 2 существует огромная разница. Дело в том, что в случае векторного поля $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ символы Кристоффеля сокращаются в тензоре напряженности. Поэтому для лагранжиана $\sqrt{-g}\, L = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu}\, g^{\nu\beta}$ элементарно находится ТЭИ Гильберта, который есть вариационная производная от $\sqrt{-g}\, L$ по метрике. Это — хорошо известный максвелловский ТЭИ $T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu.} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta}$. То же можно сказать и о полях Янга–Миллса. То есть проблемы энергии в случае векторных полей (спин 1) не существует, она решается элементарно. Совершенно иначе обстоит дело в случае тензорных полей (спин 2). Теперь символы Кристоффеля в тензоре напряженности, а, значит, и в лагранжиане не сокращаются, и ТЭИ Гильберта содержит вторые производные по полям. Этот факт ведет к знаконеопределенности плотности энергии излучения, нарушению причинности и т. д., одним словом, к потере физического смысла теории. Это и есть проблема высших спинов. Единственный шанс решить эту проблему, оставаясь в рамках стандартной классической теории поля, это найти такую теорию, когда вторые производные обращались бы в нуль на уравнениях движения. Ниже мы продемонстрируем этот факт на примере теории динамического кручения [24]. О теориях гравитации с кручением можно прочесть в монографиях [25, 26] и недавнем обзоре [27].

Рассмотрим дифференциальные тождества в геометрии Римана–Картана. Тензор кривизны в геометрии Римана–Картана имеет вид

$$\widetilde{R}_{\nu\mu\lambda.}{}^{\kappa} = R_{\nu\mu\lambda.}{}^{\kappa} + 2\,\nabla_{[\nu}\, T_{\mu]\lambda.}{}^{\kappa} + 2\, T_{[\nu|\sigma|.}{}^{\kappa}\, T_{\mu]\lambda.}{}^{\sigma}, \tag{4.1}$$

где $T_{\mu\lambda\sigma} = -T_{\mu\sigma\lambda}$ — тензор конторсии, ∇_μ — риманова ковариантная производная, удовлетворяет следующим дифференциальным тождествам (тождества Бьянки)

$$\nabla_{[\lambda}\, \widetilde{R}_{\mu\nu]\alpha\beta} - T_{[\lambda|\alpha|.}{}^{\sigma}\, \widetilde{R}_{\mu\nu]\sigma\beta} - T_{\lambda|\beta|.}{}^{\sigma}\, \widetilde{R}_{\mu\nu]\alpha\sigma} \equiv 0. \tag{4.2}$$

Для лагранжиана $L = L(g_{\alpha\beta},\, \widetilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta})$ с произвольной зависимостью от тензора кривизны геометрии Римана–Картана после некоторых преобразований получим следующее тождество

$$\nabla^{\mu}\left(\widetilde{G}_{\mu\nu} - [L]^{\alpha\beta\gamma}\, S_{\mu\nu}\, T_{\alpha\beta\gamma}\right) \equiv -[L]^{\alpha\beta\gamma}\, \nabla_\nu\, T_{\alpha\beta\gamma}, \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_{\mu\nu} &= X_{\mu}^{.\alpha\beta\gamma}\, \widetilde{R}_{\nu\alpha\beta\gamma} + X_{\nu}^{.\alpha\beta\gamma}\, \widetilde{R}_{\mu\alpha\beta\gamma} - g_{\mu\nu}\, L + T_{\mu}^{.\beta\gamma}\, [L]_{\nu\beta\gamma} + T_{\nu}^{.\beta\gamma}\, [L]_{\mu\beta\gamma} + \\
&\quad + 2\,\nabla^{\beta}\left([L]_{\mu\nu\beta} + [L]_{\nu\mu\beta}\right), \\
[L]_{\alpha\beta\gamma} &= \nabla^{\sigma}\, X_{\sigma\alpha\beta\gamma} - T^{\sigma.\lambda}_{\ \ \beta}\, X_{\sigma\alpha\lambda\gamma} + T^{\sigma.\lambda}_{\ \ \gamma}\, X_{\sigma\alpha\lambda\beta} \text{ — производная Лагранжа–Эйлера}, \\
X_{\mu\nu\alpha\beta} &= \partial L / \partial \widetilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta}, \\
\widetilde{G}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

где $G_{\mu\nu}$ — обобщенный тензор Эйнштейна, $T_{\mu\nu}$ — ТЭИ Гильберта для поля $T_{\mu\alpha\beta}$.

Вторые и третьи производные от тензора $T_{\mu\alpha\beta}$ в ТЭИ Гильберта для $L = L(g_{\alpha\beta},\, \widetilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta})$ обращаются в нуль вследствие уравнений движения $[L]_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

ТЭИ Гильберта становится максвелловского (янг-миллсовского) вида. Нам представляется этот результат совершенно поразительным и неочевидным. Теория динамического кручения (спин 2-торсионный гравитон) на уравнениях движения столь же физически корректна на классическом уровне как теории Максвелла и Янга-Миллса. Физический принцип диктует именно такой вид лагранжиана и никакой другой. Принципиальную роль здесь сыграли тождества Бьянки (4.2), которые есть обобщение тождеств $\nabla_{[\lambda}\, F_{\mu\nu]} \equiv 0$, $\nabla_{[\lambda}\, R_{\mu\nu]\alpha\beta} \equiv 0$. Результат настолько общий, что он имеет место не только для лагранжиана максвелловского вида, но для любой степени тензора кривизны геометрии Римана–Картана (эффективный лагранжиан в квантовой теории). Сделаем предположение, что изученная здесь теория будет обладать и хорошими квантовыми свойствами.

5. Решение проблемы калибровочных тензорных полей типа Янга–Миллса в теории уравнения Дирака–Кэлера

Доказано, что ТЭИ Гильберта для калибровочных тензорных полей типа Янга–Миллса становится максвелловского вида на уравнениях движения. Теория таких полей столь же физически корректна, по крайней мере на классическом уровне, как теории Максвелла и Янга–Милса. И это есть главный результат.

В последние годы много внимания уделяется изучению антисимметричных тензорных полей из-за их замечательных геометрических, топологических и теоретико-групповых свойств, а также в связи с возможными физическими применениями [28–31].

В настоящей работе мы имеем дело с уравнениями 1-го порядка для набора антисимметричных тензорных полей — уравнениями Дирака–Кэлера, интерпретируемыми как общековариантная формулировка уравнения Дирака. Уравнения Дирака–Кэлера имеют ряд замечательных свойств. Они обладают группой внутренней симметрии $G = U(1) \times SO(4,2)$, операторы которой в отличие от обычно рассматриваемых групп внутренней симметрии преобразуются по тензорным представлениям группы Лоренца [28]. Антисимметричные тензорные поля могут быть источником нелинейных тензорных калибровочных полей типа Янга–Миллса [30]. В уравнение Дирака–Кэлера вписываются четыре поколения заряженных фермионов, например, четыре лептона или четыре кварка. Среди калибровочных тензорных полей есть четыре векторных поля — это то, что необходимо для реализации сектора Вайнберга–Салама. Но есть и еще кое-что, например, спин 2 (калибровочное тензорное поле третьего ранга). А это уже единая теория электрослабых и гравитационных взаимодействий.

Рассмотрим лагранжиан

$$L_0 = \frac{1}{2}\,(F,\, \Lambda F) + \frac{1}{2}\,(\Lambda F,\, F) + m\,(F,\, F), \tag{5.1}$$

который приводит к уравнению Дирака–Кэлера

$$\Lambda F = -m\,F \quad (\hbar = c = 1), \quad \Lambda = d + \delta. \tag{5.2}$$

Мы используем обозначение работ [28–30] и поэтому не будем подробно останавливаться на определениях и разъяснениях, которые там даны.

Лагранжиан L_0 инвариантен относительно глобального преобразования, которое приводит к сохраняющемуся тензорному току $J_\mu^{\cdot\alpha\beta}$.

Рассмотрим здесь кратко взаимодействие

$$L_G = \frac{1}{2}\, g\, A_\mu^{\cdot\alpha\beta}\, J^\mu_{\cdot\alpha\beta}, \tag{5.3}$$

где $A_{\mu\alpha\beta} = -A_{\mu\beta\alpha}$ — действительное тензорное поле.

Волновое уравнение при наличии внешнего поля $A_{\mu}^{\cdot\alpha\beta}$ получается заменой в (5.2)

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2}\, g\, A_{\mu}^{\cdot\alpha\beta}\, \Sigma_{\alpha\beta}. \tag{5.4}$$

При выводе уравнений второго порядка появляется коммутатор

$$\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu = \frac{1}{2}\, g\, F_{\mu\nu..}^{\quad\alpha\beta}\, \Sigma_{\alpha\beta}, \tag{5.5}$$

где $F_{\mu\nu\alpha\beta}$ — тензор напряженности поля $A_{\mu\alpha\beta}$, в точности совпадающий с тензором кривизны Римана–Картана (4.1) в плоском пространстве-времени.

И этот поразительный факт позволяет утверждать, что главный результат предыдущего раздела, касающийся ТЭИ Гильберта для динамического кручения, целиком и полностью переносится на случай калибровочных тензорных полей типа Янга–Миллса. Причем следует заметить, что получить этот результат для полей типа Янга–Миллса, оставаясь в пространстве-времени Минковского, было бы практически невозможным. Принципиальную роль сыграло наличие римановой кривизны в формуле (4.1). Мы уже отмечали, что ТЭИ Гильберта для тензорных полей весьма нетривиальная вещь и с ним очень непросто работать.

Заметим, что тензор конторсии $T_{\mu\alpha\beta}$ в геометрии Римана–Картана и калибровочное тензорное поле типа Янга–Миллса $A_{\mu\alpha\beta}$ в теории Дирака–Кэлера — это два совершенно различных по своей геометрической и физической природе поля. Они по-разному входят в ковариантную производную, т. е. по-разному взаимодействуют с материей. А классическая проблема энергии-импульса теории высших спинов решается единым образом и для $T_{\mu\alpha\beta}$, и для $A_{\mu\alpha\beta}$. И это есть самый важный результат последних двух разделов.

В заключение автор выражает искреннюю признательность академику Логунову А.А. за интерес и внимание к работе. Автор благодарит профессора Мествиришвили М.А. за многочисленные плодотворные обсуждения проблемы энергии в теории поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров Ю.С.* Системы отсчета в теории гравитации, «Энергоиздат», М., *1982*.
2. *Мицкевич Н.В., Ефремов А.П., Нестеров А.И.* Динамика полей в общей теории относительности, «Энергоатомиздат», М., *1985*.
3. *Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С.* Сборник задач по теории относительности и гравитации, «Мир», М., *1979*.
4. *Сибгатуллин Н.Р.* Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях, «Наука», М., *1984*.
5. Черные дыры, Сб. статей под редакцией В.П. Фролова, Сер. НФФ, 9, «Мир», М., *1978*.
6. *Паули В.* Теория относительности, «Наука», М., *1991*.
7. *Леонович А.А.* Проблемы физики высоких энергий и теории поля. Труды IX Международного семинара. Протвино, 7–13 июля *1986* г., «Наука», М., *1987*.
8. *Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Е.* Точные решения уравнений Эйнштейна, «Энергоиздат», М., *1982*.
9. *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени, «Мир», М., *1984*.
10. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях, «Энергоатомиздат», М., *1988*.
11. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время, «Мир», М., *1987*.
12. *Ashtekar* New perspectices on canonical gravity, Bibliopolis, Naples, *1988*.
13. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения, «Физ.-мат.», М., *1961*.
14. *Leonovich A.A., Mladenov D.M.* Mod. Phys. Lett. A (to be published).

15. Общая теория относительности, Сб. статей под редакцией Я.А. Смородинского и В.Б. Брагинского, «Мир», М.: *1983.*
16. *Leonovich A.A.* In Problems on High Energy Physics and Field Theory, Proceedings of the 14 Workshop, Protvino, *1991*, «Nauka», M., *1992.*
17. *Денисов В.И., Логунов А.А.* Современные проблемы математики. Итоги науки и техники, ВИНИТИ, М., *1982*, т. 21.
18. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Релятивистская теория гравитации, «Наука», М., *1989.*
19. *Родичев В.И.* Теория тяготения в ортогональном репере, «Наука», М., *1974.*
20. *Швингер Ю.* Частицы, источники, поля, «Мир», М., *1973.*
21. *Барбашов Б.М., Леонович А.А., Пестов А.Б.* Препринт ОИЯИ Р2–82–151, Дубна, *1982*; ЯФ, *1983*, 38, Вып. 1(7), С. 261–263.
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля, «Наука», М., *1988.*
23. *Леонович А.А.* Труды семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны», ОИЯИ Р2–92–12, Дубна, *1992*; ОИЯИ Р2–92–559, Дубна, *1993*, ОИЯИ Р2–94–150, Дубна, 1994.
24. *Барбашов Б.М., Леонович А.А.* Сообщение ОИЯИ Р5–83–398, Дубна, *1983.*
25. *Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий, «Энергоатомиздат», М., *1985.*
26. *Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А.* Калибровочная теория гравитации, Изд. МГУ, М., *1985.*
27. *Обухов Ю.Н., Пронин П.И.* Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации, Т. 2, М., *1991.*
28. *Леонович А.А.* Теоретико групповые методы в физике, Юрмала 1985, «Наука», М., *1986.*
29. *Леонович А.А.* ТМФ, *1983*, **57**, 12.
30. *Леонович А.А., Пестов А.Б.* Препринт ОИЯИ Р2–80–823, Дубна, *1980*; ДАН БССР, *1981*, **25**, 110.
31. *Pestov A.B.* Preprint JINR E2–92–537, Dubna, *1992.*
32. *Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В.* Современные проблемы гравитации Сб. трудов II-ой Советской гравитационной конференции. Тбилиси *1967.*