ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 2 1996
Журнал по дискуссионным проблемам гравитационной физики .... стр. 30–39

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БИРКГОФОВСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ И СПИНОРНЫМ ПОЛЯМИ

М. Мошинский*

Теория гравитационного поля в плоском пространстве-времени, предложенная Дж.Д. Биркгофом, обсуждается с точки зрения взаимодействия с другими полями. Показано, что это взаимодействие описывается функцией Лагранжа $\hbar_{\mu\nu}\vartheta_{\mu\nu}$, которая в применении к электромагнитному и спинорному полям, приводит к модификации уравнений Максвелла и Дирака. Эти модифицированные уравнения определяют эффективный показатель преломления и сдвиг энергетических уровней атома, что позволяет получить гравитационные отклонение света и красное смещение. Помимо этого, они предсказыввают гравитационные поправки к магнитному моменту, связанному со спином и орбитальным движением электрона.

Содержание

1. Введение

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к релятивистским теориям поля в связи с исследованиями взаимодействий мезонных, электромагнитных и спинорных полей. Эффектом гравитационного поля в этих взаимодействиях, как правило, пренебрегали, отчасти из-за его малости, отчасти ввиду особого положения, занимаемого гравитационным полем в общей теории относительности.

Поэтому представляется целесообразным рассмотреть гравитацию в плоском пространстве-времени с позиций теории поля. Такое описание гравитации было предложено Дж.Д. Биркгофом [1–5]; в нем гравитационное поле представляется в плоском пространстве-времени симметричным тензором потенциалов $h_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Уравнение движения частицы с массой покоя m дается обычным соотношением специальной теории относительности $m(d^2x_a/ds^2) = f_\alpha$, где f_α это

*Унивеситет Мехико, Мексика. Перевод с оригинала: Moshinsky M., «On the interactions of Birkhoff's gravitational field with the electromagnetic and pair fields», 1950, Phys. rev., **v. 80**, p. 514

пондеромоторная гравитационная сила:

$$f_\alpha = m\left(\frac{\partial h_{\alpha\beta} r}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}. \tag{1}$$

Движение, таким образом, не зависит от массы частицы.

Поле, порожденное распределением вещества, представляемого тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, дается уравнением поля [6]:

$$\Box \hbar_{\alpha\beta} = \frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta},\ -\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} T, \tag{2}$$

где $\Box \equiv \nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$, и G — гравитационная постоянная.

Из (2) и других предположений следует, что поле вне однородной сферы массы M на расстоянии r от ее центра дается [2]:

$$h_{\alpha\beta} = \frac{MG}{c^2 r}\delta_{\alpha\beta} \quad \text{где} \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, \text{если } \alpha \neq \beta \\ 1, \text{если } \alpha = \beta \end{cases}, \tag{3}$$

что одновременно является полем точечной частицы той же массы. При подстановке поля (3) в уравнение движения (1), получается эффект смещения перегелия планеты в поле звезды с численным значением, совпадающим с тем, которое следует из общей теории относительности [1–4].

Эффекты отклонения лучей света и красного смещения могут рассматриваться в теории Бирккофа на основе уравнения (1) и концепции фотонов [1–4], однако представляется более корректным исследовать их исходя из воздействия гравитационного поля на электромагнитное и на процессы излучения. Для этого необходимо построить формализм учета этого воздействия.

Функция Лагранжа [7], приводящая к уравнениям (2), дается:

$$L = -\frac{c^4}{8\pi G} g^{\alpha\beta}\frac{\partial h^{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial x^\delta} + \hbar^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta} \equiv L_B + \hbar^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta}\,, \tag{4}$$

и $\delta\int L\,d^4x = 0$ приводит к (2). Первое слагаемое этого лагранжиана L_B соответствует свободному гравитационному полю, поскольку его варьирование дает $\Box\hbar_{\gamma\delta} = 0$. Второй член, $h^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta}$ в котором $T_{\gamma\delta}$ — тензор энергии-импульса внешнего поля, приводит к взаимодействию между этим полем и гравитационным. Этот член в чем-то подобен соответствующему члену $\jmath_\alpha A^\alpha/c$ в лагранжиане электромагнитного поля, описывающего его взаимодействие с веществом L_B.

При введении лагранжиана для бирктофовского свободного поля мы получаем из общего формализма полевой теории [7, 8] тензор энергии-импульса поля, имеющий гравитационную природу и воздействующий, как источник, на уравнение (2). Отсюда ясно, что описание взаимодействия членом в форме $h^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta}$ где $T_{\gamma\delta}$ соответствует внешнему полю, применимо лишь для слабых гравитационных полей ($h_{\gamma\delta} \ll 1$), которыми мы и ограничим наше рассмотрение в данной статье.

Функция Лагранжа, из которой можно получить взаимодействие поля Биркхгофа с другими полями, имеет вид:

$$L = L_B + \hbar^{\alpha\beta}\vartheta_{\alpha\beta} + L', \tag{5}$$

где L' — функция Лагранжа этих полей и $\vartheta_{\alpha\beta}$ — их симметричный тензор энергии-импульса.

Модифицированное уравнение поля будет получено из обычного вариационнго принципа:

$$\delta\int L d^4x = 0. \tag{6}$$

Мы применим этот анализ для рассмотрения взаимодействия Биркхгофовского поля с электромагнитым и спинорным полями, для чего нам понадобятся следующие обозначения:

$x^\alpha = (ct, \mathbf{r})$ индексы α, β, γ, δ принимают значения 0, 1, 2, 3 с суммированием по повторяющимся индексам от 0 до 3;

$x^\mu = (\mathbf{r}, ict)$ индексы принимают значения 1, 2, 3, 4 и суммирование по повторяющимся индексам идет от 1 до 4;

$g^{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$ и $g^{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$;

$g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$ и $-g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$;

$\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 1$ если $\mu = \nu$;

$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$;

$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$;

$A_\mu = (\mathbf{A}, i\varphi)$ — электромагнитные потенциалы;

$E_{\mu\nu} = \partial A_\mu/\partial x^\nu - \partial A_\nu/\partial x^\mu$ — напряженности электромагнитного поля;

$\mathbf{E} = -i(E_{14}, E_{24}, E_{34})$, $\mathbf{B} = (E_{32}, E_{13}, E_{21})$;

ε — диэлектрическая постоянная;

μ — магнитная восприимчивость;

n — показатель преломления;

ψ — четырехкомпонентная волновая функция Дирака;

ψ^+ — сопряженная функция Дирака;

m, e — масса и заряд электрона;

γ_μ, α_i, β, σ_i — матрицы Дирака, определенные согласно монографии Паули [9];

j_μ — 4-вектор плотности тока;

$L_B = c^4/8\pi G \cdot (\partial h_{\rho\sigma}/\partial x^\mu)(\partial h_{\rho\sigma}/\partial x^\mu)$ — функция Лагранжа Биркгофовского поля;

$\delta L/\delta q = -\partial/\partial x^\mu \left[\partial L/\partial(\partial q/\partial x^\mu)\right] + \partial L/\partial q$ — вариационная производная от L по переменной q;

$T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса, полученный из лагранжиана поля согласно книге Венцеля [8];

$\vartheta_{\mu\nu}$ — симметричный тензор энергии-импульса;

$P_\mu = \hbar/i(\partial q/\partial x^\mu)$;

M — масса тела, порождающего гравитационное поле;

G — гравитационная постоянная;

$\hbar$ — потоянная Планка;

c — скорость света;

ρ, ϑ, φ — сферические координаты;

$u = 1/r$;

$M' \equiv MG/c^2$; $f \equiv MG/c^2 r$;

ν — частота, $\lambda = c/\nu$ — длина волны.

С этого момента мы будем использовать координаты x^μ, поэтому все тензоры, определенные в координатах x^α, должны быть преобразованы в систему x^μ по обычным правилам. Например, $h_{\alpha\beta}$ переходит в $h_{\mu\nu}$ с компонентами

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{ij} & -ih_{i0} \\ -ih_{0j} & -h_{00} \end{pmatrix}.$$

В системе координат x^μ гравитационное поле (3) становится:

$$h_{\mu\nu} = -\frac{MG}{c^2 r} g_{\mu\nu} \equiv -f g_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Метрическим тензором координатной системы x^μ является $-\delta_{\mu\nu}$, что дает $A^\mu = -A_\mu$, $h^{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Взаимодействие в функции Лагранжа записывается как $h_{\mu\nu}\vartheta_{\mu\nu}$.

2. Взаимодействие с электромагнитным полем

Функция Лагранжа для электромагнитного поля дается:

$$L_{em} = -\frac{1}{16\pi} E_{\mu\nu} E_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \tag{8a}$$

а соответствующий симметричный тензор энегрии-импульса:

$$\vartheta_{\mu\nu}{}^{em} = \frac{1}{4\pi}\left[E_{\mu\rho}E_{\nu\rho} - \frac{1}{4}E_{\rho\sigma}E_{\rho\sigma}\delta_{\mu\nu}\right]. \tag{8b}$$

Лагранжиан для взаимодействующих гравитационного и электромагнитного полей записывается как:

$$L = L_B + \vartheta_{\mu\nu}{}^{em} h_{\mu\nu} + L_{em}\,. \tag{8c}$$

Уравнения поля получаются отсюда с помощью вариационного принципа (6) с $\hbar_{\mu\nu}$, A_μ в качестве переменных поля:

$$\delta \int L\, d^4x = \int \left(\frac{\delta L}{\delta h_{\mu\nu}} \delta h_{\mu\nu} + \frac{\delta L}{\delta A_\mu} \right) d^4x = 0. \tag{9}$$

Это вариационное соотношение приводит к уравнениям $\delta L/\delta h_{\mu\nu} = 0$ и $\delta L/\delta A_\mu = 0$ Первое из них — это уравнение (2) гравитационного поля с $T_{\mu\nu} = \vartheta_{\mu\nu}{}^{em}$. Второе представляет собой уравнения электромагнитного поля в присутствии гравитационного:

$$\partial/\partial x^\nu [E_{\mu\nu} - 2h_{\mu\nu} E_{\rho\nu} 2E_{\rho\nu} h_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} h_{\rho\rho}]. \tag{10a}$$

К этим уравнениям надо добавить уравнения поля, полученные из определения $E_{\mu\nu}$ [10]:

$$\partial E_{\mu\nu}/\partial x^\rho + \partial E_{\rho\mu}/\partial x^\nu + \partial E_{\nu\rho}/\partial x^\mu = 0. \tag{10b}$$

Уравнения (10) переходят в обычные уравнения Максвелла в отсутствие гравитационного поля, т. е. при $h_{\mu\nu} = 0$.

Особый интерес представляет случай электромагнитного поля вне сферически симметричного распределения вещества, например, звезды. Для его определения достаточно подставить соответствующие компоненты поля $h_{\mu\nu} = (MG/c^2 r) g_{\mu\nu}$ в (10). Запишем получающиеся уравнения в терминах векторов **E**, **B**:

$$\nabla \cdot (1+2f)\mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times (1+2f)\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(1+2f)\mathbf{E}, \tag{11a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad f \equiv \frac{MG}{c^2 r}. \tag{11b}$$

Сравним эти уравнения с уравнениями поля в неоднородной среде, свободной от токов и зарядов [11]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \tag{12a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \tag{12b}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{12c}$$

Из (11) и (12) следует, что гравитационное поле звезды проявляет себя в отношении электромагнитного поля, как неоднородная материальная среда. Действительно, (11) и (12) совпадают, если мы положим

$$\varepsilon = 1 + 2M'/r, \quad \mu = 1/(1 - 2M'/r). \tag{13}$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость являются функциями расстояния от звезды, эффективный показатель преломления окружающего звезду пространства, который дается формулой [11]

$$n = (\varepsilon\mu)^{1/2} = \left(\frac{1 + 2M'/r}{1 - 2M'/r} \right)^{1/2}, \tag{14}$$

также является функцией этого расстояния. Свет, проходящий в окрестности звезды, будет, таким образом, отклоняться гравитационным полем.

3. Отклонение лучей света

Мы можем воспользоваться принципом Ферма для расчета отклонения лучей света в гравитационном поле звезды, т.к. он следует из уравнений электромагнитного поля [12] в плоском простанстве-времени.

Пусть луч света идет из бесконечности вдоль прямой линии $[AB]$ в отсутствии гравитационного поля. Пусть масса, создающая поле, расположена в точке C, и b — длина перпендикуляра из C на $[AB]$, как показано на рис. 1. Введем сферические координаты с полярной осью, параллельной $[AB]$. Плоскость CAB полагаем плоскостью с $\varphi = 0$.

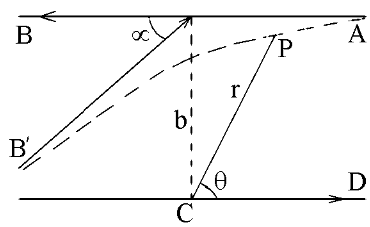

Рис. 1.

Принцип Ферма утверждает, что оптический путь, определяемый интегралом

$$\delta \int n\, dl = 0 \tag{15a}$$

вдоль луча, минимален. Поскольку показатель преломления $n = n(r)$ зависит лишь от расстояния от C, задача имеет сферическую симметрию и луч, начавший распространение в плоскости $\varphi = 0$, будет находиться в ней все время. Вариационный принцип (15a) дает:

$$\delta \int n(r)(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)^{1/2} = \delta \int n(r)(1 + r^2\vartheta'^2)^{1/2}\, dr - \delta \int \mathcal{L}\, dr \tag{15b}$$

и соответстующее уроавнение Эйлера будет:

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dr}\frac{n(r) r^2 \vartheta'}{1 + r^2\vartheta'^2} = 0 \tag{15c}$$

или

$$n(r)^2 \vartheta' (1 + r^2\vartheta'^2)^{-1/2} = \text{const} = a. \tag{15d}$$

При подстановке $u = 1/r$ уравнение (15d) переходит в

$$n(u)[(du/d\vartheta)^2 + u^2]^{-1/2} = -a, \tag{16a}$$

где $n^2(u) = (1 + 2M'u) / (1 - 2M'u) \simeq 1 + 4M'u$ из (14). Последнее приближение верно, т. к. r должно быть больше радиуса звезды R, так что $M'u < M'/R$, и для всех звезд M'/R мало, в частности, для Солнца $\simeq 10^{-6}$. При этом условии уравнение (16a) может быть немедленно проинтегрировано и мы получаем:

$$u = 1/a[2M'/a + (1 + 4M'^2/a^2)]^{1/2} \sin(\vartheta + \delta)]. \tag{16b}$$

Траекторией луча являетяся гипербола, и две константы, α, δ, ее определяющие, находятся из условия асимптотического перехода гиперболы в прямую линию $[AB]$

с уравнением $u = b^{-1}\sin\vartheta$. При $\vartheta \to 0$ мы должны иметь $u \to 0$, и $du/d\vartheta \to b^{-1}$ и, пренебрегая $(2M'/b)^2$ по сравнению с единицей, получаем:

$$a = b, \quad \text{и} \quad \sin\delta = -2M'/b, \quad \text{или} \quad \delta \simeq -2M'/b, \tag{16c}$$

где опять $M'/b < M/R \ll 1$. Уравнение гиперболы теперь записывается как

$$u = 1/b[2M'/b + \sin(\vartheta - 2M'/b)], \tag{16d}$$

и вторая асимптотика дается $\vartheta = \pi + 4M'/b$, т. к. $u \simeq 0$ для этого значения. Угол α между асимтотиками, показанный на рис. 1, есть

$$\alpha = 4M'/b, \tag{17}$$

т. е. имеет то же значение, что и в общей теории относительности.

4. Взаимодействие со спинорным полем

Функция Лагранжа для спинорного поля дается выражением [7]:

$$L_D = \frac{\hbar c}{2i}\left(\psi^+\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x^\mu}\gamma_\mu\psi\right) + imc^2\psi^+\psi, \tag{18a}$$

и соответствующий тензор момента-импульса:

$$T_{\mu\nu}{}^D = \frac{\hbar c}{2i}\left(\psi^+\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x^\nu}\gamma_\mu\psi\right). \tag{18b}$$

Этот тензор не является симметричным, однако известно [7], что симметричный тензор имеет вид: $\vartheta_{\mu\nu}{}^D = {}^1\!/_2(T_{\mu\nu}{}^D + T_{\nu\mu}{}^D)$. Взаимодействие с гравитационным полем дается членом $\vartheta_{\mu\nu}{}^D h_{\mu\nu}$, где $h_{\mu\nu}$ является симметричным, и это эквивалентно $T_{\mu\nu}{}^D h_{\mu\nu}$.

Функция Лагранжа для взаимодействующих гравитационного и спинорного полей записывается как

$$L = L_B + T_{\mu\nu}{}^D h_{\mu\nu} + L_D. \tag{18c}$$

Уравнения поля получаются из вариационного принципа (6), с переменными поля $h_{\mu\nu}$, ψ, ψ^+:

$$\delta\int L d^4x = \int\left[\frac{\delta L}{\delta\hbar_{\mu\nu}}\delta\hbar_{\mu\nu} + \delta\psi^+\frac{\delta L}{\delta\psi^+} + \frac{\delta L}{\delta\psi}\delta\psi\right]d^4x = 0. \tag{19}$$

Это соотношение приводит к уравнениям $\delta L/\delta h_{\mu\nu} = 0$, $\delta L/\delta\psi^+ = 0$, $\delta L/\delta\psi = 0$ первое из которых есть (2) с $T_{\mu\nu} = \vartheta_{\mu\nu}{}^D$, а другие представляют обменные уравнения в присутствии гравитационного поля и принимают вид:

$$\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\psi - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\gamma_\mu\frac{\partial\hbar_{\mu\nu}\psi}{\partial x^\nu} = 0, \tag{20a}$$

$$-\frac{\partial\psi^+}{\partial x^\mu}\gamma_\mu + \frac{mc}{\hbar}\psi^+ + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi^+ h_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi^+}{\partial x^\nu}\gamma_\mu h_{\mu\nu} = 0. \tag{20b}$$

Вводя операторы $P_\mu = (\hbar/i)(\partial/\partial x^\mu)$, видим, что (20) могут быть получены из уравнения Дирака для свободной частицы подстановкой

$$P_\mu \to P_\mu - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}P_\nu - \frac{1}{2}P_\nu h_{\mu\nu}. \tag{21}$$

В классическом описании, где вектор энергии-импульса P_μ и $h_{\mu\nu}$ коммутируют, (21) означает, что P_μ заменяется на $P_\mu - h_{\mu\nu}P_\nu$, что, в некотором смысле, похоже на то, что происходит в электромагнитном случае, где $P_\mu \to P_\mu + e/cA_\mu$. Этот результат не может быть получен прямо из уравнений движения (1), т. к. они не допускают, вообще говоря, гамильновской формулировки.

Нас интересует вид 4-вектора плотности заряда-тока в присутствии гравитационного поля. Для этого умножим (20a) на ψ^+ слева и (20b) на ψ справа и вычтем, а также используем симметрию формы $h_{\mu\nu}$:

$$\partial/\partial x^\mu(\psi^+\gamma_\mu\psi - h_{\mu\nu}\psi^+\gamma_\mu\psi) = 0 \tag{22a}$$

При этом 4-вектор плотности тока электронного поля записывается как

$$j_\mu = ec(\psi^+\gamma_\mu\psi - h_{\mu\nu}\psi^+\gamma_\mu\psi), \tag{22b}$$

поскольку он удовлетворяет уравнению неразрывности (22a) и в отсутствии гравитационного поля, т. е. при $h_{\nu r} = 0$, сводится к обычному 4-вектору тока.

Нас интересуют проблемы, возникающие при одновременном движении электрона в гравитационном и электромагнитном полях. Для их анализа необходимо добавить к свободному спинорному полю в лагранжиане кроме члена ${T_{\mu\nu}}^D h_{\mu\nu}$ еще член $j_\mu A^\mu/c = -j_\mu A^\mu/c$, описывающий взаимодействие с электромагнитным полем. В этом последнем члене берем ток j_μ форме, модифицированной для случая гравитационного поля (22d). Фукция Лагранжа становится

$$L = L_D + {T_{\mu\nu}}^D h_{\mu\nu} ec(\psi^+\gamma_\mu\psi - h_{\mu\nu}\psi^+\gamma_\mu\psi)A_\mu, \tag{22c}$$

Уравнения поля получаются обычным путем из (6) с ψ, ψ^+ в качестве переменных, и для ψ получается уравнение:

$$\gamma_\mu\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^m u} + \frac{e}{c}A_\mu\right)\psi - \left(\frac{\hbar}{2i}\frac{h_{\mu\nu}\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial h_{\mu\nu}\psi}{\partial h_\nu} + \frac{e}{c}A_\nu h_{\mu\nu}\psi\right)\right] - imc\psi = 0. \tag{23}$$

Это уравнения Дирака для электрона, движущегося в комбинированном гравитационном и электромагнитном полях. Оно может быть получено из свободного уравнения Дирака, если заменить P_μ на $(P_\mu + (e/c)A_\mu) - h_{\mu\nu}\,(P_\nu + (e/c)A_\nu)$ и провести симметризацию для учета некоммутативности P_μ и $h_{\mu\nu}$ в квантовом описании. Также это можно сделать из (20a), заменив P_μ на $P_\mu + (e/c)A_\mu$ при наличии электромагнитного поля.

При помощи (23) можно оценить эффект воздействия гравитационного поля на атомы и электроны. Собственное гравитационное взаимодействие элементарных частиц в $m^2G/e^2 \simeq 10^{-40}$ слабее электрического и поэтому ненаблюдаемо. Однако, эффект внешнего поля, например, звезды, может быть наблюдаем и заслуживает обсуждения.

5. Атом водорода в гравитационном поле

Рассморим атом водорода вблизи поверхности гравитирующей массы M радиуса R. На него будет действовать постоянное поле $h_{\mu\nu} = -(MG/c^2R)r_{\mu\nu} \equiv -fg_{\mu\nu}$, причем f мало для гравитирующих тел, т. е. $f \ll 1$. Предположим также, что на атом действует внешнее электромагнитное поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}$.

Из (23) следует, что волновое уравнение для электрона в атоме водорода запишется как

$$\gamma_\mu(\delta_{\mu\nu} + fg_{\mu\nu})(\hbar/i\,\partial/\partial x^\nu + e/cA_\nu)\psi - imc\psi = 0, \tag{24}$$

где $(A_i) = \mathbf{A}$, и $A_4 = i\varphi$, где φ^* — электростатический потенциал протона. Без гравитационного поля этот потенциал имеет обычный вид $\varphi = e/r$, где r — расстояние от протона. В присутствии гравитирующей массы происходит изменение диэлектрической проницаемости пространства, так что ε принимает вид (13), т. е., $\varepsilon = 1 + 2f$. Электростатический потенциал протона становится равным

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon r} = \frac{e}{(1+2f)r}. \tag{25}$$

Умножая (24) на $i\gamma_4/(1+f)$ и используя соотношения [9] $i\gamma_4\gamma_i = \alpha_i$, $\gamma_4 = \beta$, получаем:

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c}\varphi\right)\psi = \frac{(1-f)}{(1+f)}\alpha\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi + \frac{mc}{(1+f)}\beta\psi. \tag{26}$$

В случае $\mathbf{A} = 0$ это уравнение можно решить и показать, что спектральные линии испытывают красное смещение. Описание упрощается в Гейзенберговском представлении. Поскольку гамильтониан дается $\mathcal{K} = i\hbar\partial/\partial t$, (26) определяет его соотношением:

$$\frac{\mathcal{K}}{c} + \frac{e}{c}\varphi = \frac{1-f}{1+f}\alpha\cdot\left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \frac{mc}{1+f}\beta. \tag{27}$$

Возводя обе части (27) в квадрат и используя антикоммутационные свойства α_i, β, получаем, аналогично Дираку [13]:

$$\left(\frac{\mathcal{K}}{c} + \frac{e}{c}\varphi\right)^2 = \frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}\cdot\left[\left(\mathbf{P} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{c}(\sigma\cdot\mathbf{B})\right] + \frac{m^2c^2}{(1+f)^2}, \tag{28}$$

где $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ и σ_i — спиновые матрицы.

Предполагая, что энергия первого члена в правой части (28) мала по сравнению с энергией покоя, что имеет место для водородного атома, можно извлечь корень из обеих частей и получить:

$$\frac{\mathcal{K}}{c} + \frac{e}{c}\varphi\frac{mc}{(1+f)}\frac{(1-f)^2}{2mc(1+f)}\cdot\left[\left(\mathbf{P} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{c}(\sigma\cdot\mathbf{B})\right]. \tag{29}$$

Нерелятивистский гамильтониан дается (29), когда мы пренебрегаем модифицированным членом энергии покоя $mc/(1+f)$. Подставляя (25) в (29) и принимая $f \ll 1$ так, что $(1-f)^2/(1+f) \simeq 1/(1+3f)$, получаем:

$$\mathcal{K} = -\frac{e^2}{(1+2f)r} + \frac{1}{2m(1+3f)}\cdot\left[\left(\mathbf{P} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{c}(\sigma\cdot\mathbf{B})\right]. \tag{30}$$

С помощью этого гамильтониана мы можем рассматривать воздействие гравитационного поля на водородный атом. Предположим, что внешнее магнитное поле отсутствует, т. е. $\mathbf{A} = 0$:

$$\mathcal{K} = -\frac{e'^2}{r} + \frac{1}{2m'}\mathbf{P}^2, \tag{31}$$

где $e'^2 = e^2/(1+2f)$, $m' = m(1+3f)$. Уравнение Шредингера с этим гамильтонианом дает для s-ого энергетического уровня E'_s величину [14]:

$$E'_s = \frac{m'e'^4}{2\hbar^2 s^2} = -\frac{(1+3f)me^4}{2(1+2f)^2\hbar^2 s^2} \simeq (1-f)E_s, \tag{32a}$$

где E_s — соответствующий уровень в отсутствии гравитационного поля. Таким образом, получается смещение уровней с соответствующим смещением частот:

$$\nu_{sp'} = \hbar^{-1}(E'_s - E'_p) = (1-f)\hbar^{-1}(E_s - E_p) = (1-f)\nu_{sp}, \tag{32b}$$

что приводит к $(\nu' - \nu)/\nu = \delta\nu/\nu = -f$. Соответствующее изменение длины волны, наблюдаемое на больших расстояниях от гравитирующей массы, дается:

$$\delta\lambda/\lambda = f = M'/R. \tag{33}$$

Видно, что гравитационное красное смещение излучаемых линий имеет такую же величину, что и в общей теории относительности.

6. Гравитационные поправки к магнитному моменту электрона

В гамильтониане (30) последний член соответствует дополнительной потенциальной энергии спина электрона. При замене $\mathbf{B}$ на $\mu\mathbf{H}$ μ принимает вид (13) для гравитационного поля, т. е., $\mu = 1/(1+2f)$ Поскольку $f \ll 1$ мы можем написать последний член в (30) как $(1-f)(e\hbar/2mc)\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}$. Эту дополнительную энергию можно интерпретировать как получающуюся в силу наличия магнитного момента электрона

$$-(1-f)\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}, \tag{34}$$

который переходит в обычный момент [13] при исчезновении гравитационного поля, т. е., при $f = 0$.

Гравитационные поправки к магнитному моменту электрона очень малы, у поверхности Земли можно пытаться их обнаружить лишь при $f \simeq 10^{-9}$. Этот гравитационный эффект перекрывается квантовоэлектродинамическим, имеющим величину порядка 10^{-3}. Тем не менее, представляет интерес исследовать этот эффект в гравитационном поле вращающегося тела в связи с недавним предположением Блекетта [16] о магнитном моменте вращающихся масс.

Гравитационная поправка относится как к орбитальному моменту, так и к спину электрона в водородном атоме. Для простоты, примем постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0 = \mu\mathbf{H}_0$, и, как обычно, $\mathbf{A} = {}^1\!/_2(\mu\mathbf{H}_0 \times \mathbf{r})$, подставляя это в гамильтониан (30), имеем $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ где $\mathcal{K}_1$ дается (31), а $\mathcal{K}_2$ становится:

$$\mathcal{K}_2 = (1-f)\frac{e}{2mc}\left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}) + \hbar_\sigma\right]\cdot\mathbf{H}_0 + \frac{e^2}{8mc^2}(1+f)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}_0)^2. \tag{35}$$

Магнитный момент, связанный с орбитальным движением электрона, есть $-(1-f)/(e/2mc)(\mathbf{r}\times\mathbf{P})$, и в него входит та же поправка, что и в спиновый момент.

Из вида $\mathcal{K}_2$ следует наличие гравитационной поправки к эффекту Зеемана, хотя она и очень мала и замывается вторым членом в (35) наряду с квантовоэлектродинамическими поправками.

Наблюдаемые гравитационные эффекты могут быть сравнительно просто объяснены в терминах взаимодействия Биркгофовского поля с другими полями. Математическая простота гравитационных теорий в плоском пространстве-времени делает их очень полезными при изучении классических и квантовых эффектов гравитации.

Я выражаю глубокую признательность профессорам А. Барахасу и С. Граефу из Университета Мексико за представленную теорию гравитации Дж.Д. Биркгофа, профессорам Дж. Биркгофу и В.Н. Фьюрри из Гарвардского университета за плодотворное обсуждение рукописи.

Особо надо отметить поддержку данной работы со стороны Комиссии по Координации научных исследований и интерес, проявленный к работе со стороны председателя ее Физической секции проф. М.С. Валларты.

ПРИМЕЧАНИЯ И БИБЛИОГРАФИЯ

1. *G.D. Birkhoff*, Proc. Nat. Acad. Sci., **29**, 231 (1944).
2. *G.D. Birkhoff*, Proc. Nat. Acad. Sci., **30**, 324 (1944).
3. *Barajas, Birkhoff, Graef, Vallarta*, Phys. Rev. **66**, 138 (1944).
4. *A. Barajas*, Proc. Nat. Acad. Sci. 30, 54 (1944).
5. *G.D. Birkhoff*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 1 (No. 4,5) 1 (1944).
6. В статьях Биркгофа [1, 2] уравнения поля имеют вид $\Box h_{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4 T_{\alpha\beta}$, где $h_{\alpha\beta}$ являются безразмерными, а $T_{\alpha\beta}$ имеют размерность плотности энергии. Отличие на факторе 2 в уравнении (2) в этой статье, связано со специальной формой, принятой Биркгофом для тензора идеальной жидкости. При обычной записи этого тензора множитель 8π должен быть заменен на 4π (см. [10], с. 71).
7. *W. Pauli*, Rev. Mod. Phys. 13, 203, (1941).
8. *G. Wentzel*, Quantum Theory of Fields (Interscience Publishers, Inc., New York, 1949) Chap.1.
9. *W. Pauli*, Handb. Der Physik. 2 Aufl., Band 24, (Springer, Berlin, 1933) p.219–220.
10. *R.C. Tolman*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology (Oxford Univ. Press, London, 1934) p.97.
11. *J.H. Van Vleck*, The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities (Oxford Univ. Press, London, 1932) pp.1, 13.
12. *J.A. Stratton*, Electromagnetic Theory (McGraw-Hill Book Company, New York, 1941), First Edition, p. 343.
13. *P.A.M. Dirac*, Quantum Mechanics, (Oxford Univ. Press, London, 1947), Third Edition, p.264.
14. См. ссылку 13, p.158.
15. *J. Schwinger*, Phys. Rev. 73, 416 (1948).
16. *P.M.S. Blackett*, Nature 159, 658 (1947).