ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 1 1996
Дискуссионный журнал по проблемам гравитационной физики .... page 38–64

ПРИНЦИП МАХА

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С УЧЕТОМ ПРИНЦИПА МАХА

К.В. Анисович

Научно-производственное объединение "Спектрон", Санкт-Петербург, Россия

Содержание

Введение. Принцип Маха в гравитационной теории

В механике различают инерциальные системы отсчета и неинерциальные. В первых свободное тело движется прямолинейно и равномерно. Во вторых, наоборот, тело, не подверженное действию сил от каких-либо источников — ближайших окружающих тел, движется неравномерно.

Ньютон связывал разный характер движения свободного тела в этих системах с разным характером движения самих систем относительно "абсолютного пространства". А именно, движущаяся равномерно и прямолинейно, т. е. неускоренная относительно "абсолютного пространства" система будет инерциальной. И наоборот, при ускорении системы отсчета относительно "абсолютного пространства", например, за счет ее вращения, она становится неинерциальной.

Правда, сам Ньютон в [1], введя для построения механики понятие "абсолютное пространство", сделал замечание, что, возможно, оно реально не существует, а является идеализацией, необходимой для построения системы уравнений движения.

Эрнст Мах в своей "Механике" [2] обратил внимание на то обстоятельство, что когда мы имеем дело с инерциальной системой отсчета, она всегда оказывается покоящейся, либо равномерно движущейся без вращения относительно окружающего нас "фона" далеких звезд (и галактик). И наоборот, неинерциальной системой отсчета всякий раз оказывается система, которая неравномерно движется, либо вращается по отношению к этому звездному "фону". В частности, при вращении системы отсчета относительно этого звездного фона в ней будут наблюдаться силы Кориолиса и другие силы инерции.

Учитывая это, Э. Мах высказал утверждение, что такое совпадение не случайно, и что причиной инерциальности или неинерциальности системы является не характер ее движения относительно "абсолютного пространства", а характер движения ее относительно окружающего "фона" звезд.

При этом, вклад в образование "инерциальности" системы от движения окружающих тел должен быть интегральным и при этом таким, чтобы влияние произвольного движения ближайших, даже в нашем представлении и массивных тел на инерциальность системы было бы незначительным, в то время как интегральный вклад от большого числа окружающих далеких масс был бы определяющим.

Это соответствовало бы известному факту, что собственное вращение Земли не увлекает за собой во вращение инерциальную систему, и одновременно объясняло бы мысленный эксперимент Ньютона с вращающимся ведром с водой.

Отметим, что здесь идет речь не просто о замене термина "абсолютное пространство" на термин "фон звезд", а о новой, выдвинутой Махом продуктивной программе построения механики в таком виде, чтобы в ее уравнения входили бы только относительные движения тел по отношению к друг другу, в отличие от ньютоновой механики, в которую входят относительные (ускоренные) движения тел по отношению к "абсолютному пространству" (в дальнейшем, в принятой терминологии — ускоренные движения относительно т. н. "инерциальной системы").

При таком подходе в этих двух механиках описание основополагающих предсказаний выглядело бы по разному.

Так, по Ньютону одиночное во всем Пространстве жидкое тело при вращении его относительно "абсолютного пространства" должно принять форму сплющенного эллипсоида, в то время как по Маху одиночное во всем пространстве тело при любом вращении его относительно малого наблюдателя должно остаться сферическим, поскольку оно своим вращением полностью "увлекает" за собой инерциальную систему отсчета.

По Маху для реального турбулентного движения материи во Вселенной понятие инерциальности носит локальный характер и меняется от одной области пространства к другой, в то время как по Ньютону "абсолютная система" едина и в смысле ускорений и вращений "вморожена" в пространство.

Продуктивность подхода Маха состояла в том, что в механике, в случае реализации его программы, только по заданному распределению движущихся окружающих масс в данной системе отсчета можно было бы *a priori* вычислить, является она инерциальной или нет, и насколько (!). В то время как в механике Ньютона такая постановка задачи вообще невозможна.

Создание общей теории относительности (ОТО), казалось, должно было бы продвинуть эту проблему. Хотя А. Эйнштейн полностью воспринял идеи Маха и включил их как програмный пункт при формулировке общей теории относительности (именно отсюда термин "общая"),[1] и правильно сформулировал этот принцип для полевой теории в виде: "Все $g^{\mu\nu}$-поле должно быть определено распределением (и движением) окружающих масс" [3], однако в ОТО, как отмечали многие авторы, этот принцип не вошел. В дальнейшем сам принцип Маха подвергся критике.

Мы не будем пока рассматривать степень обоснованности критических замечаний. Констатируем только факт, что в современной разработке ОТО при решении конкретных задач не только не может обойтись без использования абсолютного пространства, но часто использует его как основной строительный материал теории.

Так, в ОТО возможна постановка задачи о вращении одиночного тела во Вселенной относительно фонового пространства Минковского (фактически относительно "абсолютного пространства" Ньютона), и метрика Керра дает такой пример.

По Маху единственной метрикой вращающегося для наблюдателя одиночного во Вселенной массивного тела могла бы быть метрика Шварцшильда, транспонированная преобразованием вращения для данного наблюдателя. Да и метрика Шварцшильда по Маху также не могла бы быть метрикой одиночного во Вселенной тела, поскольку мотивация условия метрики Минковского на бесконечности восходит снова к абсолютному пространству.

Все что было сказано выше, обсуждалось неоднократно (например, [4–8]), и ситуация сейчас формулируется так:

1) может в утверждении Маха и содержится рациональное зерно, однако неясно, как можно обойтись в описании, например, механики без понятий "абсолютное ускорение", "абсолютное вращение", и:

2) как может быть включен этот принцип в релятивистскую теорию тяготения, например, в ОТО.

1. Принцип Маха в классической механике

Ответим сначала на первый вопрос. В качестве иллюстрации предложим (сначала феноменологически) уравнения классической механики в произвольной системе отсчета без введения абсолютного пространства. Рассмотрение такого варианта механики позволит легче прояснить, как в произвольной системе отсчета неинерциальное движение относительно абсолютного пространства может быть заменено на неинерциальное движение относительно окружающей материи.

Это прояснит содержание самого принципа Маха в классической механике и даст некоторые указания на то, как следует искать маховский подход в полевой теории.

Рассмотрим сначала в рамках ньютоновой механики инерциальную систему отсчета Q. Введем в ней полярные координаты r и φ. В указанных координатах уравнения свободного (равномерного и прямолинейного) движения тела имеют вид

$$\ddot{\varphi} = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,\dot{\varphi}, \quad \ddot{r} = r(\dot{\varphi})^2. \tag{1}$$

(здесь $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, и т. д.).

[1] В смысле программной установки на использование в теории только относительных, в том числе и ускоренных, движений окружающей материи.

Если мы теперь перейдем во вращающуюся с угловой скоростью Ω систему отсчета, то уравнения в ней того же, что и в (1) свободного движения тела станут вида

$$\ddot{\varphi} = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,(\dot{\varphi} - \Omega) + \dot{\Omega}, \quad \ddot{r} = r(\dot{\varphi} - \Omega)^2. \tag{2}$$

В уравнении (1) $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{r}$ — это движения пробного тела по отношению к телу отсчета. Казалось бы, в в этом случае мы имеем дело только с относительными движениями тел. Однако выясняется, что в данном случае в качестве тела отсчета подходит не любое тело, а только то, которое движется свободно и не вращается. По отношению к чему "движется свободно и не вращается"? Мы знаем (вернее, договорились), что свободное движение — это движение при отсутствии действующих на тело сил. Если это гравитационные силы, то их величина от окружающих тел m_a на тело отсчета m_q равна

$$\mathbf{F}_{aq} = -G\sum_a \frac{m_a m_q}{r_{aq}^3}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_q), \tag{3}$$

где r_{aq}, $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_q$ — относительные величины, и равенство этой суммы нулю решает вопрос о свободности движения.

С вращением дело обстоит иначе. Мы не знаем, как через движение окружающих тел выразить, вращается ли система отсчета или нет. В этой ситуации нам не остается ничего другого, как считать указанное вращение системы Ω происходящим по отношению к абсолютному пространству.

И в этом смысле уравнение (2) не удовлетворяет требованию принципа Маха.

Попробуем продвинуться в этом вопросе. Если принять на время, что величина Ω выражалась бы через движение окружающих тел, например, в виде

$$\Omega = \sum_a \frac{m_a}{r_{qa}}\,\dot{\varphi}_a, \tag{4}$$

где m_a, r_{qa}, φ_a — соответственно, масса тела "a", расстояние от тела "a" до тела отсчета Q и угловое положение тела "a" в Q, то формально мы бы выполнили требование принципа Маха, поскольку в уравнения движения (2) в неинерциальной системе отсчета в этом случае будут входить только относительные движения тел. При этом "маховская механика" при наличии тяготения и неинерциального движения формулировалась бы следующим образом:

рассматриваем произвольную, в общем случае неинерциальную, систему отсчета Q, связанную с массивным телом M, в поле которой движется пробное тело m_b. В системе Q введем сферическую систему координат (хронометрическую, на основе светолокационных измерений расстояний до окружающих тел r_a с их угловыми координатами ϑ_a, φ_a). Пусть массы тел, соответственно, равны m_a.

В указанных координатах сформулируем уравнения движения для пробного тела m_b в виде:

Для координаты φ

$$\ddot{\varphi} = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,(\dot{\varphi} - \frac{1}{\Phi}\sum \frac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a) + \frac{1}{\Phi}\sum \frac{m_a}{r_a}\,\ddot{\varphi}_a \tag{5}$$

(т. е. мы заменили в (2) Ω на ее выражение из (4)), где $\Phi \equiv \sum m_a/r_a$ — суммарный потенциал от всех тел Вселенной (рассматривается островное строение Вселенной) в окрестности тела отсчета Q. При этом подразумевается, что пробное тело также находится в окрестности тела Q, т. е. что $r_b \ll r_a$.

Исследуем данное уравнение. Если бы все окружающие тела m_a Вселенной (звезды) вращались бы как твердая оболочка с центром вращения в Q, т. е. все $\dot{\varphi}_a$ и $\ddot{\varphi}_a$ имели бы одно значение, то уравнение (5) преобразовалось бы в

$$\ddot{\varphi} = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_a) + \ddot{\varphi}_a, \tag{6}$$

т. е. в уравнение классической механики в неинерциальной системе отсчета, где первый член справа — это кориолисова сила, а второй член — инерциальная сила, связанная с неравномерностью вращения системы. Только теперь $\dot{\varphi}_a$ и $\ddot{\varphi}_a$ — это не вращение инерциальной системы относительно нашей системы Q, а вращение в нашей ситеме окружающего фона звезд.

Теперь видно, что в (5) члены $\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a$ и $\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{m_a}{r_a}\,\ddot{\varphi}_a$ — это вклады каждой массы m_a в образование неинерциальности системы отсчета Q. При этом, в общем случае движения тел m_a, первый член — это кориолисова сила, связанная с вращением в целом фона звезд относительно системы Q, а второй член — сила инерции, связанная с неравномерностью вращения звезд в целом относительно системы Q.

Если с телом Q связать подвижные координатные оси Q_0' и вращать их так, чтобы имели место два равенства

$$\sum \frac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a{}' = 0, \quad \sum \frac{m_a}{r_a}\,\ddot{\varphi}_a{}' = 0, \tag{7}$$

то система координат запишется в виде Q_0' будет инерциальна относительно вращения. В этом случае уравнение движения для $\dot{\varphi}'$ в Q_0' запишется

$$\ddot{\varphi}' = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,\dot{\varphi}',$$

что будет соответствовать классическому уравнению движения для свободной частицы в инерциальной системе отсчета в полярных координатах.

Аналогично построим маховское уравнение движения для координаты r. Общий вид уравнения будет

$$\ddot{r} = r(\dot{\varphi} - \Omega)^2 - G\Phi_{,r} - W^r, \tag{8}$$

где второй член справа — ньютонова сила, а третий

$$W^r = \sum \frac{m_a}{r_a}\,\ddot{r}_a^r \tag{9}$$

— радиальное ускорение, индуцируемое радиальными ускорениями фона звезд. Здесь $\ddot{r}_a^r = (\ddot{\mathbf{r}}_{qa}\cdot\mathbf{r})/r$.

Указанные уравнения (5) и (8) с Ω и W^r, задаваемыми (4) и (9), используют только относительные движения и ускорения тел и не опираются на вводимое при формулировке задачи движение системы Q относительно инерциальной. Само же понятие инерциальной системы может быть определено через относительное движение, как такое движение системы, при котором в ней выполняются условия равенства нулю векторов Ω, $\dot{\Omega}$ и W^r:

$$\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\ddot{\varphi}_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\ddot{r}_a^r = 0, \tag{10}$$

Как видно из (10), при произвольных движениях окружающих тел равенство нулю векторов Q и W^r для одного координатного репера может выполняться только локально, и следовательно, понятие инерциальной системы является локальным, а именно, в каждой области пространства-времени репер инерциальных координат имеет свое значение вращения и ускорения по отношению к фону окружающих тел. Так что одним из следствий принципа Маха является утверждение о принципиальном отсутствии глобальных инерциальных систем отсчета.

2. Принцип Маха в общей теории относительности

2.1. Принципиальные трудности гравитационной теории без учета принципа Маха.

Рассмотрим те проблемы, которые возникают в гравитационной теории, если в нее не включен принцип Маха. При этом под включением принципа Маха в теорию будем подразумевать такое построение ее уравнений, которое позволяет получать значения полей $g^{\mu\nu}$ на основе только информации о движении окружающей материи (в смысле трактовки А. Эйнштейна: "все $g^{\mu\nu}$-поле определяется движением и распределением окружающих масс").

Как мы видели на примере классической механики, экспериментируя внутри локальной лаборатории с пробными телами, можно установить, в какой степени она образует инерциальную систему, и если нет, то несложно по этим данным воссоздать в этой области именно инерциальный репер.

Далее по Ньютону мы имеем право бесконечно продлить этот репер и калибровку до практической реализации глобальной инерциальной системы отсчета. И здесь не возникает проблем — единственно ли наше построение этой глобальной системы. А именно, если бы мы такое построение сделали, опираясь на локальные эксперименты в другой пространственно-временной области, то инерциальные системы с точностью до их относительного равномерного движения совпали бы в обоих случаях. Так что во времена Ньютона ответ на вопрос о единственности построения системы глобальных инерциальных систем на основе локальных измерений был положителен.

Однако после появления ОТО ответ на вопрос о возможности такого воссоздания глобальных систем стал неоднозначным. Действительно, уравнения ОТО уже в слабом поле приводят к разному относительному ускоренному движению локальных инерциальных реперов (в которых метрика локально диагональна). И поскольку наблюдатель всегда работает с локальным репером, то как ему узнать, что именно его репер в качестве граничных условий на бесконечности имеет, например, метрику Минковского?

При этом два наблюдателя в разнесенных пространственно-временных областях, как правило, придут к разным выводам. Действительно, только ньютонова механика не имела в уравнениях членов, нарушающих инерциальность за счет движения окружающих тел. Но в ОТО иная ситуация, там такие члены — это практически все члены метрики $g^{\mu\nu}$ (особенно недиагональные члены типа g^{0i} $(i = 1, 2, 3)$. И эти члены уже в слабом поле определяются как сумма вкладов $g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ от движения окружающих тел: $h^{\mu\nu}$ (через тензор $\mu_0 U^\mu U^\nu$) и вклада от плоской метрики $g_0^{\mu\nu}$, задаваемой, как правило на бесконечности $g_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}|_\infty$.

Но для двух пространственно разнесенных локально инерциальных реперов, движущихся неравномерно по отношению друг к другу (а такое, как правило, имеет место в ОТО), как решить диллемму — какому наблюдателю считать, что у него, в его системе на бесконечности имеет место $(g_0^{\mu\nu})_1 = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1)$, в то время, как у другого $(g_0^{\mu\nu})_2 \neq \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1)$ (или наоборот?).

Единственный выход из данной практической ситуации при принятии, в общем, случайных условий на метрику $g^{\mu\nu}|_\infty$ — это долгое, методом последовательных приближений восстановление ее правильного вида за счет учета и реконструкции во все большей области Вселенной самосогласованной картины движения реальных тел с выбираемым значением $g^{\mu\nu}|_\infty$.

Для реализации этой возможности нам также требуется, чтобы на бесконечности фоновая метрика имела бы, например, плоский характер (что может иметь место при островном распределении материи). При этом мы, учитывая движение все более далеких источников для корректировки $g^{\mu\nu}|_\infty$, фактически осуществляем маховскую программу — хотим изучать явления в локальной области, а вынуждены последовательно учитывать поправки от все более далеких областей, заполненных материей.

Итак, включение принципа Маха в гравитационную теорию является необходимым.

2.2. Принцип Маха в полевой теории.

По существу, маховские уравнения классической механики являются указанием на способ построения полевой гравитационной теории с учетом принципа Маха. Так в ОТО движение пробного тела в произвольной системе отсчета Q описывается как движение по геодезической

$$-\frac{dU^\mu}{ds} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}(g_{\alpha\rho,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho})U^\alpha U^\beta \tag{11}$$

в пространстве с заданным полем $g_{\alpha\beta}$ (здесь $U^\alpha = dX_b^\alpha/ds_b$ — 4-скорость пробной частицы "b"). При стандартном решении для нахождениея поля $g^{\mu\nu}$ нам нужно *задать* движение системы Q относительно инерциальной (через задание, например метрики на бесконечности $g^{\mu\nu}|_\infty$), и уже потом учесть влияние ближайших окружающих тел как добавку к $g^{\mu\nu}|_\infty$.

Таким образом, чтобы избавиться от указанного задания ускорения и вращения системы, нужно уметь *вычислять* поле $g^{\mu\nu}$ только на основании движения окружающей материи. И мы приходим к формулировке принципа Маха, данного еще Эйнштейном: "Все $g^{\mu\nu}$-поле должно определяться только на основании движения и распределения окружающей материи".

Итак, видно, что решение задачи должно опираться на *интегральное* выражение компонент метрического тензора через источники поля — тензор энергии-импульса материи.

Второе соображение. Сведения о распределении и движении материи во всем пространстве мы принципиально можем получать не как мгновенную картину, а как запаздывающую информацию. Так что интегральные выражения для компонент поля $g^{\mu\nu}$ должны быть запаздывающими. Это означает, что область интегрирования по источникам для определения значения поля $g^{\mu\nu}$ в данной мировой точке должна представлять собой световой конус с вершиной в этой точке.

И, наконец, для однозначного интегрирования в искривленном пространстве-времени в качестве координатных линий мы должны опираться на геодезические. Однако в такой поставке задача сложна и совсем не обязательно должна быть прямо проведена.

Существует обходной путь, связанный с интегрированием по "фоновому" плоскому пространству. А именно, поскольку информация об интегрировании нужна наблюдателю в некоторой системе Q, то последний может воспользоваться собственной глобальной системой координат (глобальной системой нумерации пространственно-временных событий), связанной с Q. Эту систему координат, исходя из вышесказанного (запаздывание информации), он должен строить с началом координат в той локальной 4-области, в которой рассматривается интересующее его движение тел.

Самое естественное — это располагать начало системы отсчета в месте нахождения пробного тела, или пойти еще дальше — просто рассматривать пробное тело как тело отсчета. Система координат наблюдателя должна строиться ковариантным образом — не должна зависеть от первичного случайного выбора координат $\hat{x}^\alpha$ (от первоначально заданной нумерации мировых событий в координатной системе).

И наконец, наблюдатель, если позволяет задача, может воспользоваться фоновой метрикой Минковокого-Пуанкаре $\gamma^{\mu\nu}$, с помощью которой он ковариантно (в операционном смысле) определит расстояния до тел r_a, а также припишет каждому положению тел значения ϑ_a, φ_a.

2.3. Принцип Маха и выбор первого приближения для уравнений тяготения.

Выясним, как связан выбор первого приближения в уравнениях Гильберта-Эйнштейна с возможность согласования такого выбора с полевой формулировкой принципа Маха: "Все поле $g^{\mu\nu}$ должно быть определено распределением и движением окружающих масс".

Рассмотрим типичную задачу ОТО по определению $g^{\mu\nu}$ для слабого поля с островным распределением вещества. Уравнения гравитационного поля Гильберта-Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} = -8\pi\mu_0 \frac{G}{c^2}\left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\right), \tag{12}$$

где μ_0 — инвариантная плотность массы, $U^\mu = dX^\mu/ds$ — 4-скорость массы, G — ньютонова гравитационная постоянная, c — скорость света, а тензор Риччи [9]

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\right)^{;\alpha}_{;\alpha} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{13}$$

выражается через даламбертиан по метрике $g^{\mu\nu}$ и два слагаемых, содержащих члены, квадратичные по первым производным от метрического тензора.

Для слабого поля в координатах, в которых на бесконечности метрика имеет вид $g_0^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1)$, двумя последними членами в (13) ввиду их малости обычно пренебрегают. Пренебрегают также и различием метрик $g^{\mu\nu}$ и $g_0^{\mu\nu}$, и уравнение (13), например для статического случая, сводится в первом приближении к уравнению Пуассона

$$\Delta g^{\mu\nu} = -4\pi\mu_0 \frac{G}{c^2}\left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\right), \tag{14}$$

где $\Delta g^{\mu\nu} = \gamma^{ik}\partial^2 g^{\mu\nu}/\partial x^i \partial x^k$, $i, k = 1, 2, 3$; $U^\mu = dX^\mu/(\gamma_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu)^{1/2}$, а метрика $\gamma^{\mu\nu}$ во всем пространстве плоская и совпадает с метрикой $g^{\mu\nu}$ на бесконечности, т. е.

$$\gamma^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1).$$

С помощью формулы Грина значение функции $g_{\mu\nu}$ в точке P может быть представлено через объемный и поверхностный интегралы [10]

$$g^{\mu\nu}(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\Delta g^{\mu\nu}}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial n} - g^{\mu\nu}\,\frac{\partial r^{-1}}{\partial n}\right) dS, \tag{15}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V, n — внешняя нормаль к поверхности, r — расстояние от переменной точки интегрирования до точки P. Если в (15) подставить значение правой части (14), являющейся источником поля $g^{\mu\nu}$, то получим интегральное выражение поля $g^{\mu\nu}$ через объемный интеграл по источникам и поверхностный интеграл. Выберем S в виде сферы с центром в точке P и устремим r к бесконечности. Тогда нормаль n на поверхности совпадет с r, $g^{\mu\nu}$ совпадет с $\gamma^{\mu\nu}$, откуда $\partial\gamma^{\mu\nu}/\partial r = 0$, и поверхностный интеграл станет равным

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial n} - g^{\mu\nu}\,\frac{\partial r^{-1}}{\partial n}\right) dS = \gamma^{\mu\nu}. \tag{16}$$

Подставляя в (15) значение правой части (14) а также (16) и, учитывая, что для малых скоростей

$$U^0U^0 - \frac{1}{2}\gamma^{00} = \frac{1}{2}c^{-2}, \quad U^iU^i - \frac{1}{2}\gamma^{ii} = \frac{1}{2},$$

получим

$$g^{00} = \frac{2G}{c^4}\int\limits_V \frac{\mu_0}{r}\,dV + \gamma^{00} = c^{-2}(\Psi+1), \quad g^{ii} = \frac{2G}{c^2}\int\limits_V \frac{\mu_0}{r}\,dV + \gamma^{ii} = \Psi - 1, \tag{17}$$

где обозначено

$$\Psi = \frac{2G}{c^2}\int\limits_V \frac{\mu_0}{r}\,dV = \frac{2G}{c^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a}. \tag{18}$$

Разложим с помощью (17) и (18) метрику вблизи одиночного массивного тела (например, вблизи Солнца)

$$c^{-2}g^{00} = 1 + \frac{2G}{c^4}\frac{m_s}{r_s} + \Psi_0, \quad g^{ii} = -1 + \frac{2G}{c^2}\frac{m_s}{r_s} + \Psi_0, \tag{19}$$

где $\Psi_0 \equiv \dfrac{2G}{c^2}\sum\limits_{a\neq s}\dfrac{m_a}{r_a}$, m_s — масса Солнца, r_s — расстояние от Солнца до точки, где вычисляется значение поля.

Учитывая, что разложение метрики g^{ii}, соответствующее эксперименту по отклонению света вблизи Солнца, имеет вид

$$g^{ii} = -1 + \frac{2G}{c^2}\frac{m_s}{r_s} \pm 10^{-8}, \tag{20}$$

в то время, как значение только части потенциала Ψ_0, соответствующей потенциалу Галактики, составляет величину порядка 10^{-6} видно, что мы не сможем ни при каких предположениях для величины Ψ ни удовлетворить эксперименту вблизи Солнечной системы, ни выполнить требование, чтобы метрика полностью определялась распределением окружающих масс (т. к. для последнего нам в (15) нужно требовать условия $\int_S \simeq 0$ на бесконечности, но тогда из (15) и (14) мы не получили бы правильной сигнатуры метрики для g^{ii}).

2.4. Изменение первого приближения при интегральной формулировке решений для уравнений тяготения.

При стандартном подходе к поиску решений уравнений тяготения рассматривают дифференциальные уравнения Гильберта-Эйнштейна и, задаваясь начальными и граничными условиями, ищут либо приближенное, либо (если это возможно) точное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным условиям.

При поиске приближенного решения в исходном дифференциальном уравнении исследуют порядок малости каждого из членов и отбрасывают те из них, вклад которых имеет более высокий порядок малости, чем порядок приближения искомого решения.

Так, в уравнении Гильберта-Эйнштейна с пылевидным распределением материи в качестве источника

$$R^{\mu\nu} = -4\pi æ\mu_0\left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\right) \tag{21}$$

(здесь $æ = 2G/c^2$) в тензоре Риччи $R^{\mu\nu}$, выраженном через даламбертиан по полю $g^{\mu\nu}$

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(g^{\mu\nu})_{,\alpha}^{;\alpha} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{22}$$

два последних члена в первом приближении обычно не учитываются, ввиду их малости. Это достигается за счет наложения специальных координатных условий (например, требования гармоночности координат, что дает $\Gamma^{\mu\nu}=0$), а также за счет принятия слабости поля и выбора координатных условий на бесконечности в виде метрики Минковского-Пуанкаре $g^{\mu\nu}|_\infty=\gamma^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(c^{-2},-1,-1,-1)$.

Если же по самой постановке задачи нас интересуют не решения уравнений в локальной области с заданными граничными условиями, а решения интегрального типа (чего требует принцип Маха: поле $g^{\mu\nu}$ в данной точке P определяется распределением и движением материи во всей области пространства), то характер подхода к поиску решений изменяется; решения имеют вид интегралов по всему пространству, и в этом случае величины второго порядка малости при интегрировании по всему пространству часто оказываются уже величинами первого порядка и должны учитываться при получении первого приближения для поля $g^{\mu\nu}$.

В частности, при таком подходе вклад членов вида $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ в уравнении (21) становится значителен и требует учета уже в первом приближении.[2]

2.5. Вклад в $g^{\mu\nu}$ от членов, квадратичных по первым производным по метрике.

Два последних члена выражения (22) имеют вид [9]

$$-\Gamma^{\mu\nu}\equiv-\frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{,\alpha}+g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{,\alpha}-g^{\mu\nu}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}\right), \tag{23}$$

где

$$\Gamma^{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\rho}\right)_{,\rho}, \tag{24}$$

а также имеем

$$\Gamma^{\mu\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}_{,\rho}-g^{\alpha\rho}g^{\beta\mu}_{,\rho}-g^{\beta\rho}g^{\alpha\mu}_{,\rho}\right), \tag{25}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\beta}+g_{\beta\mu,\alpha}-g_{\alpha\beta,\mu}\right). \tag{26}$$

Для вычисления членов, квадратичных по производным по метрике $g^{\mu\nu}$ вводим хронометрические координаты X^{α} наблюдателя с фоновой метрикой

$$\gamma^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(c^{-2},-1,-1,-1). \tag{27}$$

При этом координаты наблюдателя строятся так, чтобы движение окружающего вещества (фон звезд, галактик) было бы изотропным (в указанных координатах микроволновый фон изотропен), а распределение вещества предполагается имеющим сферическую симметрию. Поскольку каждую компоненту поля $g^{\mu\nu}$ мы связываем с движением соответствующей компоненты тензора источника поля, т. е. с характером движения окружающих тел в выбранной системе отсчета, то симметрии в пространственном распределении и движении источника (окружающих масс) отразятся и на симметриях метрического тензора $g^{\mu\nu}$. Ввиду выбора координатной системы наблюдателя так, чтобы она в среднем не вращалась по отношению к окружающей материи, и для нее отсутствовало бы и существенное поступательное движение к окружающей материи (микроволновый фон в X^{α} изотропен), метрику $g^{\mu\nu}$ в первом приближении локально можно считать диагональной, т. е.

$$(g^{\alpha\beta})_1=\mathrm{diag}(g^{00},g^{rr},g^{\vartheta\vartheta},g^{\varphi\varphi}), \tag{28}$$

[2] Аналогичная ситуация имеет место при получении решения Фридмана для всей Вселенной (например, [9]), где члены $\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha}$ являются равноправными членами в получаемом решении.

и зависящей в среднем только от координат t и r.

С учетом этих предположений вычислим значения членов $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$.

Из (23) и (24) имеем

$$\begin{aligned}
\Gamma^{00} &= \frac{1}{2}\,(2g^{00}\Gamma^{0}_{,0} - g^{00}_{,0}\Gamma^{0} - g^{00}_{,r}\Gamma^{r}); \quad \Gamma^{0} = -\frac{3}{2}\,g^{00}_{,0} - \frac{1}{2}\,g^{rr}g^{00}g_{rr,0};\\
\Gamma^{rr} &= \frac{1}{2}\,(2g^{rr}\Gamma^{r}_{,r} - g^{rr}_{,0}\Gamma^{0} - g^{rr}_{,r}\Gamma^{r}); \quad \Gamma^{r} = -\frac{3}{2}\,g^{rr}_{,r} - \frac{1}{2}\,g^{rr}g^{00}g_{00,r};\\
\Gamma^{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{2}\,(-g^{\vartheta\vartheta}_{,0}\Gamma^{0} - g^{\vartheta\vartheta}_{,r}\Gamma^{r}); \quad \Gamma^{\vartheta} = 0;\\
\Gamma^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}\,(-g^{\varphi\varphi}_{,0}\Gamma^{0} - g^{\varphi\varphi}_{,r}\Gamma^{r}); \quad \Gamma^{\varphi} = 0;
\end{aligned} \tag{29}$$

откуда

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{00} \;&=\; \frac{3}{2}\,g^{00}g^{00}_{,,0} + \frac{1}{2}\,(g^{00})^2 g^{rr}g_{rr,,0} + \frac{1}{2}\,g^{00}(g^{00}g^{rr})_{,0}g_{rr,0} -\\
&\quad -\frac{3}{4}\,(g^{00}_{,0})^2 - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{00}_{,0}g_{rr,0} - \frac{3}{4}\,g^{00}_{,r}g^{rr}_{,r} - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{00}_{,r}g_{00,r},\\
-\Gamma^{rr} \;&=\; \frac{3}{2}\,g^{rr}g^{rr}_{,,r} + \frac{1}{2}\,(g^{rr})^2 g^{00}g_{00,,r} + \frac{1}{2}\,g^{rr}(g^{00}g^{rr})_{,r}g_{00,r} -\\
&\quad -\frac{3}{4}\,(g^{rr}_{,r})^2 - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{rr}_{,0}g_{rr,0} - \frac{3}{4}\,g^{00}_{,0}g^{rr}_{,0} - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{rr}_{,r}g_{00,r},\\
-\Gamma^{\vartheta\vartheta} \;&=\; -\frac{3}{4}\,g^{\vartheta\vartheta}_{,0}g^{00}_{,0} - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{\vartheta\vartheta}_{,0}g_{rr,0} - \frac{3}{4}\,g^{\vartheta\vartheta}_{,r}g^{rr}_{,r} - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{\vartheta\vartheta}_{,r}g_{00,r},\\
-\Gamma^{\varphi\varphi} \;&=\; -\frac{3}{4}\,g^{\varphi\varphi}_{,0}g^{00}_{,0} - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{\varphi\varphi}_{,0}g_{rr,0} - \frac{3}{4}\,g^{\varphi\varphi}_{,r}g^{rr}_{,r} - \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{\varphi\varphi}_{,r}g_{00,r}.
\end{aligned} \tag{30}$$

В свою очередь из (25) и (26) получим

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{0}_{\alpha\beta} \;&=\; -\frac{1}{4}g^{00}(g^{00}g^{00}_{,0}g_{00,0} + g^{00}g^{rr}_{,0}g_{rr,0} + 2g^{rr}g^{00}_{,r}g_{00,r}),\\
\Gamma^{r\alpha\beta}\Gamma^{r}_{\alpha\beta} \;&=\; -\frac{1}{4}g^{rr}(g^{rr}g^{00}_{,r}g_{00,r} + g^{rr}g^{rr}_{,r}g_{rr,r} + 2g^{00}g^{rr}_{,0}g_{rr,0}),\\
\Gamma^{\vartheta\alpha\beta}\Gamma^{\vartheta}_{\alpha\beta} \;&=\; -\frac{1}{4}g^{\vartheta\vartheta}g^{00}(g^{00}_{,0}g_{00,0} + g^{\vartheta\vartheta}_{,0}g_{\vartheta\vartheta,0}),\\
\Gamma^{\varphi\alpha\beta}\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta} \;&=\; -\frac{1}{4}g^{\varphi\varphi}g^{00}(g^{00}_{,0}g_{00,0} + g^{\varphi\varphi}_{,0}g_{\varphi\varphi,0}).
\end{aligned} \tag{31}$$

Полученные выражения в (30), (31) позволят нам вычислить дополнительные вклады в метрику $g^{\mu\nu}$ при интегральном представлении $g^{\mu\nu}$ через источники по всему пространству.

2.6. Интегральное выражение поля $g^{\mu\nu}$ через объемные и поверхностные интегралы членов уравнения Гильберта-Эйнштейна.

Каждый член уравнения поля (21) является тензором. В тождественном выражении (22) слева стоит тензор, а члены справа, хотя в отдельности и не являются тензорами, вместе образуют тензор. Поскольку выражение (22) является тождественным, то всякая тождественная операция с ним, при которой слева мы получим, например, значение $g^{\mu\nu}(P)$ в некоторой точке P, т. е. тензор, а справа — остальные члены, представляющие интегралы, как от тензорных, так и нетензорных величин, приведет к тому, что правая часть этого выражения в целом будет представлять тензорную величину в той же точке P.

Выделение даламбертиана из тензора Риччи в (22) преследует цель тождественного представления поля $g^{\mu\nu}(P)$ через объемные и поверхностные интегралы от остальных членов (21) и (22). Как отмечалось выше, ковариантное интегрирование в искривленном пространстве, в принципе, возможно, если в качестве кривых и поверхностей использовать ковариантно заданные кривые и поверхности (например, геодезические кривые и поверхности, построенные на них).

Однако, в таком виде эту процедуру провести сложно. Можно использовать обходной путь, проводя интегрирование в фоновом пространстве, построенном на основе системы отсчета наблюдателя. Это построение требует задания (предъявления) базиса (тела отсчета) наблюдателя и задания ковариантного способа арифметизации событий X^α в этом базисе (см. Приложение 1). В качестве метрики $\gamma^{\mu\nu}$ в фоновом пространстве естественно выбрать плоскую метрику Пуанкаре-Минковского (27).

В указанной метрике поле $g^{\mu\nu}$ в каждой точке P можно представить как

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{32}$$

((32) является определением $h^{\mu\nu}$), где

$$\gamma^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1). \tag{33}$$

С помощью (32) выделим в (22) даламбертиан по фоновой метрике

$$\gamma^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta} \equiv g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta} - h^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta} \equiv -2R^{\mu\nu} - 2\Gamma^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta}. \tag{34}$$

Выражение (34) можно записать

$$\gamma^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta} = f^{\mu\nu}(X^\alpha), \tag{35}$$

где $f^{\mu\nu}(X^\alpha)$ — обозначает правую часть (34).

С помощью формулы Кирхгоффа [10], являющейся тождественным интегральным представлением функции[3] (в нашем случае $g^{\mu\nu}$), входящей в уравнение (35), через объемный и поверхностный интегралы

$$g^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{1}{r}(f^{\mu\nu})^* \, dV + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left[\frac{1}{r}(g^{\mu\nu}_{,n})^* + \frac{r_{,n}}{rc}(g^{\mu\nu}_{,0})^* - \left(\frac{1}{r}\right)_{,n}(g^{\mu\nu})^*\right] dS, \tag{36}$$

где точка P находится внутри 3-объема V, ограниченного поверхностью S, r — расстояние от точки P до переменной точки интегрирования X^α, n — внешняя нормаль к поверхности, $f^*(t, r, \vartheta, \varphi) \equiv f(t - r/c, r, \vartheta, \varphi)$ — запаздывающее значение функции (взятое не в момент t, а в предшествующий момент, необходимый, чтобы пройти путь r от точки интегрирования X^α до точки P); то же относится и к $(g^{\mu\nu})^* \equiv g^{\mu\nu}(t - r/c, r, \vartheta, \varphi)$.

В отношении (34)–(36) можно сказать следующее. Хотя ни правая, ни левая часть (34) (то же и к (35)) не являются тензорами, однако в силу тождественности обеих частей, равенство (34) сохраняется в любых координатах, т. е. ковариантно. То же можно сказать и о формуле (36). При преобразованиях координат $X^\alpha \to X^{\alpha'}$ равенство (36) сохранится. Но в (36) слева стоит тензор, который при преобразованиях координат преобразуется по тензорному закону — значит и правая часть (36), в целом, должна преобразовываться как тензор в точке P.

2.7. Полевая формулировка принципа Маха.

Функцией $f^{\mu\nu}$ обозначена вся правая часть равенства (34). Подставляя в $f^{\mu\nu}$ вместо $R^{\mu\nu}$ его выражение через источники поля из уравнения Гильберта-Эйнштейна (21), получим

$$f^{\mu\nu} = 8\pi æ\mu_0 \left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\right) - 2\Gamma^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta}. \tag{37}$$

[3] Тождественным для функции непрерывной в V вплоть до поверхности S и имеющей непрерывные частные производные первого порядка внутри V.

Как видно из (36) и (37), значение поля в искомой точке P определяется распределением материи и распределением полей, индуцированных материей. При этом для однозначного определения $g^{\mu\nu}(P)$, помимо распределения материи $\mu_0(U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}/2)$ и других источников внутри области V, необходимо также знание значений $(g^{\mu\nu})^*$, $(g^{\mu\nu}_{,n})^*$, $(g^{\mu\nu}_{,0})^*$ на поверхности области S. Это естественно, т. к. для ограниченной области V в нее могут и не попасть все источники, формирующие $g^{\mu\nu}(P)$, что учитывается поверхностным интегралом; последний также учитывает свободные внешние поля, проникающие в область V.

Устремим границу области S к бесконечности. При этом,[4] ввиду ограниченности источников, все они окажутся внутри области V. Тем не менее, интеграл по S не обязан быть равен нулю.

Однако указанный случай, например, для статичных полей означал бы, что существует глобальное статичное поле, не связанное с источниками, т. е. это поле фактически "вморожено" в пространство. При наличии такого поля можно говорить и об ускоренном движении системы отсчета по отношению к этому полю, т. е. фактически по отношению к "абсолютному пространству", в которое оно "вморожено". Содержание же принципа Маха[5] состоит в том, что таких глобальных полей, не обусловленных конкретными источниками, нет.

Обращаясь к (36), можно утверждать, что требование принципа Маха означает, что при стремлении границы области S к бесконечности вклад в $g^{\mu\nu}(P)$ от $\int_S$ должен убывать по сравнению с вкладом от $\int_V$, стремясь в пределе к нулю, т. е.

$$\frac{1}{g^{\mu\nu}(P)}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left[\frac{1}{r}(g^{\mu\nu}_{,n})^* + \frac{r_{,n}}{rc}(g^{\mu\nu}_{,0})^* - \left(\frac{1}{r}\right)_{,n}(g^{\mu\nu})^*\right]dS = 0, \tag{38}$$

Выясним, какие ограничения это накладывает на функцию $g^{\mu\nu}(X^\alpha)$, входящую в подинтегральные выражения (38).

Не снижая общности в качестве границы области интегрирования S мы можем выбрать сферу с центром в точке P (система отсчета наблюдателя связывается с точкой P). Тогда направление нормали n совпадет с радиусом r, и формула (38) упростится. Примем также ряд других упрощающих предположений, которые мы уже использовали ранее. А именно, будем считать, что распределение источников и поля имеют сферическую симметрию.

Тогда условие выполнения принципа Маха (38) запишется в виде

$$\frac{1}{g^{\mu\nu}(P)}\lim_{r\to\infty}\left[rg^{\mu\nu}_{,r} + \frac{r}{c}g^{\mu\nu}_{,0} + g^{\mu\nu}\right]^*_r = 0, \tag{39}$$

где все значения в скобках берутся на сфере радиуса r в момент $t^* = t - r/c$. Если при островном распределении масс при $r \to \infty$ и $t \to -\infty$ функция $g^{\mu\nu}(X^\alpha)$ является слабо убывающей, с ростом r и $(-t)$, например, $\sim 1/r^q$ и $\sim 1/t^q$, где $q \ll 1$, то она удовлетворяет маховскому условию (39). Очевидно, что принятие на бесконечности в качестве метрики $g^{\mu\nu}(X^\alpha)$ метрики Пуанкаре-Минковского $\gamma^{\mu\nu}(X^\alpha)$ не позволяет выполнить условие (39).

2.8. Вычисление диагональных членов метрики в первом приближении.

[4] Здесь мы рассматриваем островное строение Вселенной; другие варианты обсуждаются ниже (примечание 7).

[5] Для сильного принципа Маха (см. далее — приложение 2).

Будем считать, что в дальнейшем найденные нами решения будут удовлетворять маховскому условию (39). Тогда из (36) и (38) для поля $g^{\mu\nu}(P)$ получим

$$g^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{1}{r}\left[8\pi æ\mu_0\left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\right) - 2\Gamma^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta}\right]^* dV, \quad (40)$$

где интегрирование по V идет по всему пространству для запаздывающих значений t^*.

Из (40) видно, что вклад в $g^{\mu\nu}(P)$ дают как члены, зависящие от распределения масс $\mu_0(X^\alpha)$, так и члены, зависящие от самих полей (как будет показано ниже, в основном, зависящие от квадратов производных $(g^{\nu\nu}_{,0})^2$, $(g^{\nu\nu}_{,r})^2$ и т. д. по метрике). Вклад в метрику членов, зависящих от распределения масс, мы будем обозначать через Φ, а вклад в метрику членов, зависящих от вклада полей — через α, β, δ, ξ. При этом для каждой компоненты метрики будет

$$g^{00}(P) = a\Phi + \alpha, \quad g^{rr}(P) = b\Phi + \beta, \quad \text{и т. д.}, \quad (41)$$

где a, $b \ldots = \mathrm{const}$.

Теперь примем следующее условие. Для вычисления первого приближения $g^{\mu\nu}_1(P)$, будем считать, что величины α, β, δ, ξ, являющиеся результатом интегрирования по квадратам градиентов полей по всему пространству, слабо зависят в области точки P от изменения пространственной и временной координат, т. е. $\alpha_{,0} \simeq 0$ и $\alpha_{,r} \simeq 0$, $\beta_{,0} \simeq 0$, $\beta_{,r} \simeq 0$, и т. д. В то время, как величина Φ, обусловленная наличием материи, претерпевает в области P координатные изменения. Т. е. $\Phi_{,0}$, $\Phi_{,r}$, в общем случае, отличны от нуля.

На основе изложенного приступим к вычислению метрических коэффициентов в первом приближении. Примем, что относительные скорости материальных тел невелики по сравнению со скоростью света $U^i \simeq 0$, $(i = 1, 2, 3)$, а также примем, что в нулевом приближении в качестве метрики при вычислении в формуле (40) можно использовать фоновую метрику наблюдателя (27) в сферических координатах

$$g^{\mu\nu}_0 = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1/r^2, -1/r^2\sin^2\vartheta). \quad (42)$$

Для $\mu_0(U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}/2)$ получим

$$\begin{gathered}\mu_0\left(U^0U^0 - \frac{1}{2}\,g^{00}_0\right) = \frac{1}{2}\,\mu_0 g^{00}_0, \quad \mu_0\left(U^rU^r - \frac{1}{2}\,g^{rr}_0\right) = -\frac{1}{2}\,\mu_0 g^{rr}_0, \\ \mu_0\left(U^{\vartheta\vartheta} - \frac{1}{2}\,g^{\vartheta\vartheta}_0\right) = -\frac{1}{2}\,\mu_0 g^{\vartheta\vartheta}_0, \quad \mu_0\left(U^\varphi U^\varphi - \frac{1}{2}\,g^{\varphi\varphi}_0\right) = -\frac{1}{2}\,\mu_0 g^{\varphi\varphi}_0.\end{gathered} \quad (43)()$$

С учетом (43) для (41) имеем

$$\frac{g^{00}}{|g^{00}_0|} = æ\Phi + \alpha, \quad \frac{g^{rr}}{|g^{rr}_0|} = æ\Phi + \beta, \quad \frac{g^{\vartheta\vartheta}}{|g^{\vartheta\vartheta}_0|} = æ\Phi + \delta, \quad \text{и т. д.} \quad (44)$$

где из (40)

$$\frac{1}{4\pi|g^{\mu\nu}_0|}\int\limits_V \frac{1}{r} 8\pi\mu_0\left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\right)^* dV \simeq \int \frac{\mu^*_0}{r_a}\,dV = \sum_a \frac{m_a}{r^*_a} \equiv \Phi, \quad (45)$$

где r^*_a — положения тела "a" в момент $t^* = t - r_a/c$. При этом, ввиду того, что в (44) в первом приближении должно быть получено (требование на сигнатуру метрики)

$$æ\Phi + \alpha \simeq 1, \quad æ\Phi + \beta \simeq -1, \quad æ\Phi + \delta \simeq -1, \quad æ\Phi + \xi \simeq -1,$$

мы можем считать

$$\beta \simeq \delta \simeq \xi \simeq \alpha - 2. \tag{46}$$

Найдем теперь из (30), (31) значение коэффициентов α, $\beta = \delta = \xi = \alpha - 2$.

Ранее мы получили $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ с учетом зависимости их от $g^{\mu\nu}_{,0}$ и $g_{\mu\nu,0}$, а также от $g^{\mu\nu}_{,r}$ и $g_{\mu\nu,r}$ (формулы (29)–(31)).

Сделаем теперь *упрощающее допущение*, а именно, будем считать, что основной вклад в члены $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ в (40) при интегрировании по всему пространству вносят временные изменения метрики, т. е. $g^{\mu\nu}_{,0}$ и $g_{\mu\nu,0}$, в то время, как вклад при интегрировании по V от $g^{\mu\nu}_{,i}$ и $g_{\mu\nu,i}$ в эти члены мал. Т. е. при вычислениях $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ будем полагать $g^{\mu\nu}_{,i}$ и $g_{\mu\nu,i}$ равными нулю. Если это будет слишком жестким допущением, не позволяющим получить из (40) нужную сигнатуру членов метрики $g^{\mu\nu}$ и правильное разложение g^{00} и g^{ii} в слабом поле, то это допущение может быть снято. С учетом этого из (30) получим

$$\Gamma^{00} = \frac{1}{2}\,(2g^{00}\Gamma^{0}_{,0} - g^{00}_{,0}\Gamma^{0}), \quad \Gamma^{0} = -\frac{3}{2}\,g^{00}_{,0} - \frac{1}{2}\,g^{rr}g^{00}g_{rr,0},$$

что дает

$$-\Gamma^{00} = \frac{1}{2}\,(g^{00})^2 g^{rr}_{,0}g_{rr,0} + \frac{1}{4}\,g^{00}g^{rr}g^{00}_{,0}g_{rr,0} - \frac{3}{4}\,(g^{00}_{,0})^2. \tag{47}$$

Подставляя сюда

$$\frac{g^{00}_1}{|g^{00}_0|} = æ\Phi + \alpha, \quad \frac{g^{rr}_1}{|g^{rr}_0|} = \frac{g^{\vartheta\vartheta}_1}{|g^{\vartheta\vartheta}_0|} = \frac{g^{\varphi\varphi}_1}{|g^{\varphi\varphi}_0|} = æ\Phi + \alpha - 2, \tag{48}$$

а также принятые условия при вычислениях $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$

$$\Phi_{,0} \neq 0, \quad \alpha_{,0} = \alpha_{,i} = 0$$

из (47), (48) получим

$$-\Gamma^{00} = -(æ\dot{\Phi})^2(g^{00}_0)^2, \tag{49}$$

где обозначено $\dot{\Phi} = \Phi_{,0}$.

В свою очередь, из (31)

$$\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\,(g^{00})^2(g^{\alpha\beta}_{,0}g_{\alpha\beta,0}) = -\frac{1}{4}\,(g^{00})^2(g^{00}_{,0}g_{00,0} + g^{rr}_{,0}g_{rr,0} + g^{\vartheta\vartheta}_{,0}g_{\vartheta\vartheta,0} + g^{\varphi\varphi}_{,0}g_{\varphi\varphi,0}). \tag{50}$$

Подставляя сюда (48), получим

$$\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = (æ\dot{\Phi})^2(g^{00}_0)^2. \tag{51}$$

Объединяя результаты (49) и (51), будем иметь

$$-\Gamma^{00} + \Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = \left(-(æ\dot{\Phi})^2 + (æ\dot{\Phi})^2\right)(g^{00}_0)^2 = 0. \tag{52}$$

Аналогично для компонент rr (метрика диагональна, существенный вклад дают только производные от $g^{\alpha\alpha}$ по t):

$$-\Gamma^{rr} = \frac{1}{2}\,g^{rr}_{,0}\Gamma^{0} = -\frac{3}{4}\,g^{rr}_{,0}g^{00}_{,0} - \frac{1}{4}\,g^{rr}g^{00}g^{rr}_{,0}g_{rr,0}, \tag{53}$$

что при подстановке (48) даст

$$-\Gamma^{rr} = (æ\dot{\Phi})^2 g^{rr}_0 g^{00}_0. \tag{54}$$

Соответственно из (31) и (48)

$$\Gamma^{r\alpha\beta}\Gamma^r_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\, g^{rr} g^{00} g^{rr}_{,0} g_{rr,0} = \frac{1}{2}\,(æ\dot{\Phi})^2 g^{rr}_0 g^{00}_0. \qquad (55)$$

Таким образом,

$$-\Gamma^{rr} + \Gamma^{r\alpha\beta}\Gamma^r_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}\,(æ\dot{\Phi})^2 g^{00}_0 g^{rr}_0. \qquad (56)$$

С помощью выражения (40)

$$g^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{1}{r}\left[8\pi\mu_0 æ\left(U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\right) - 2\Gamma^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta}\right]^* dV$$

и найденных значений $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ получим значение метрических коэффициентов g^{00} и g^{rr} в первом приближении (членами со вторыми производными под интегралом (40) пренебрегаем).

Для g^{00} из (40), (43) и (52) имеем

$$g^{00}_1 = æ\int\limits_V \frac{\mu_0^*}{r}\, g^{00}_0\, dV = \frac{æ}{c^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a^*} = \frac{1}{c^2}\, æ\Phi(P). \qquad (57)$$

где m_a — массы окружающих тел, r_a^* — расстояние от тела m_a в момент $t^* = t - r_a(t)/c$ до точки наблюдения P.

Из (57), выделяя в g^{00}_1 вклад от ближайшего массивного тела m_s (например, Солнца), имеем

$$g^{00}_1 = c^{-2} æ\Phi_0\left(1 + \frac{m_s}{r_s\Phi_0}\right) \simeq c^{-2}\left(1 + \frac{2m_s G}{r_s c^2}\right), \qquad (58)$$

где для получения в первом приближении правильного разложения использованы следующие необходимые для теории соотношения

$$æ\Phi_0 \simeq 1, \quad \frac{c^2}{2G} = \Phi, \qquad (59)$$

при этом для слабого поля

$$\Phi \simeq \Phi_0 \quad \text{где} \quad \Phi = \sum_a \frac{m_a}{r_a^*}, \quad \Phi_0 = \sum_{a\neq s} \frac{m_a}{r_a^*}.$$

Здесь, как и ранее, G — ньютонова гравитационная постоянная, æ — константа, входящая в лагранжиан ОТО:

$$L = -8\pi\mu_0 + \frac{R}{æ}, \qquad (60)$$

Из (59) имеем для слабого поля

$$æ \simeq \frac{2G}{c^2}. \qquad (61)$$

Таким же образом из (40), (43) и (56) получим

$$g^{rr}_1 = -æ\int\limits_V \frac{\mu_0^*}{r}\, g^{rr}_0\, dV - \frac{3}{4\pi c^2}\int\limits_V \frac{1}{r}(æ\dot{\Phi}^*)^2\, dV, = æ\sum_a \frac{m_a}{r_a^*} - \frac{3}{4\pi c^2}\int\limits_V \frac{1}{r}(æ\dot{\Phi}^*)^2\, dV, \qquad (62)$$

где для получения нужной сигнатуры g_{rr} в соответствии с (46) на последний член (62) должно быть наложено условие

$$\frac{3}{8\pi c^2}\int\limits_V \frac{1}{r}\,(æ\dot{\Phi}^*)^2\, dV = 1, \qquad (63)$$

так что (62) запишется в виде

$$g_1^{rr} = \text{æ}\Phi - 2, \tag{64}$$

где

$$\Phi = \sum_a \frac{m_a}{r_a^*}.$$

Выделяя вклад в (64) от поля ближайшего массивного тела m_s, получим

$$g_1^{rr} = \text{æ}\Phi_0\left(1 + \frac{2m_sG}{r_sc^2}\right) - 2 = -1 + \frac{2m_sG}{r_sc^2}. \tag{65}$$

Аналогично

$$g_1^{\vartheta\vartheta} = |g_0^{\vartheta\vartheta}|(\text{æ}\Phi - 2), \quad g_1^{\varphi\varphi} = |g_0^{\varphi\varphi}|(\text{æ}\Phi - 2). \tag{66}$$

Полученное разложение метрик g_1^{00} и g_1^{rr} из (58) и (65), найденное с помощью интегральных выражений, соответствует в первом порядке стандартному разложению метрики в ОТО для поля одиночного тела. Для иллюстрации полного соответствия получаемой метрики эксперименту в слабом поле необходимо иметь также правильное значение для члена второго порядка малости для компоненты g^{00}. Это можно получить стандартным путем, решая дифференциальное уравнение (21) при заданных граничных условиях (но найденных уже из (58), (65) и (66)).

Отметим также, что сделанное ранее упрощающее допущение о том, что основной вклад в выражение $\int_V r^{-1}(-2\Gamma^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta})^*\,dV$ в (40) вносят временные изменения метрики, оказалось достаточным для получения диагональных компонент $g_1^{\mu\mu}$ с правильной сигнатурой и правильным разложением. Поэтому расчет недиагональных членов g^{0i} будем производить при тех же допущениях.

2.9. Вычисление недиагональных членов метрики.

Найдем теперь значение недиагонального члена метрики $g^{0\varphi}$, связанного с вращением материи относительно системы отсчета наблюдателя.

Для упрощения будем рассматривать вращение вещества в плоскости $\vartheta = \pi/2$, а также будем считать, что в выбранной системе отсчета угловые скорости $\dot\varphi_a$ и ускорения $\ddot\varphi_a$ масс, участвующих во вращении, и их вклад в образование соответствующего недиагонального члена невелики. Т. е. будем считать, что величина компоненты метрики $g^{0\varphi}$ мала по сравнению с диагональными членами метрики. Это позволит при вычислениях не учитывать малые члены типа $g^{0\varphi}_{,0}$ и др.

Для поправок к метрике $g^{0\varphi}$ от полевой части $\Gamma^{0\varphi}$ и $\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^\varphi_{\alpha\beta}$ имеем

$$-\Gamma^{0\varphi} = -\frac{1}{2}\,(g^{00}\Gamma^\varphi_{,0} + g^{\varphi 0}\Gamma^0_{,0}), \tag{67}$$

где

$$\Gamma^\varphi = -\frac{1}{2}\,g^{\varphi 0}\left(\frac{g_{00,0}}{g_{00}} + \frac{g_{rr,0}}{g_{rr}} + \frac{g_{\vartheta\vartheta,0}}{g_{\vartheta\vartheta}} + \frac{g_{\varphi\varphi,0}}{g_{\varphi\varphi}}\right) \tag{68}$$

(членом $g^{\varphi 0}_{,0}$ в (68) ввиду малости пренебрегаем), откуда

$$\Gamma^\varphi_{,0} = \frac{1}{2}\,g^{\varphi 0}\left(\frac{g^2_{00,0}}{g^2_{00}} + \frac{g^2_{rr,0}}{g^2_{rr}} + \frac{g^2_{\vartheta\vartheta,0}}{g^2_{\vartheta\vartheta}} + \frac{g^2_{\varphi\varphi,0}}{g^2_{\varphi\varphi}}\right), \tag{69}$$

$$\Gamma^0_{,0} = -\frac{1}{2}\,g^{00}g^{rr}_{,0}g_{rr,0} - \frac{1}{2}\,g^{rr}g^{00}_{,0}g_{rr,0}. \tag{70}$$

Членами со вторыми производными от метрики в (70), как и ранее, пренебрегаем. Подставляя (69), (70) в (67), получим

$$-\Gamma^{0\varphi} = -\frac{1}{4}\,g^{00}g^{\varphi 0}\left(\frac{g^2_{00,0}}{g^2_{00}} + \frac{g^2_{rr,0}}{g^2_{rr}} + \frac{g^2_{\vartheta\vartheta,0}}{g^2_{\vartheta\vartheta}} + \frac{g^2_{\varphi\varphi,0}}{g^2_{\varphi\varphi}}\right) + \\ + \frac{1}{4}\,g^{\varphi 0}g^{00}g^{rr}_{,0}g_{rr,0} + \frac{1}{4}\,g^{\varphi 0}g^{rr}g^{00}_{,0}g_{rr,0}. \tag{71}$$

С помощью (48) из (71) для величины $\Gamma^{0\varphi}$ получаем

$$-\Gamma^{0\varphi} = -g^{\varphi 0} g^{00} (\dot{\Phi})^2. \tag{72}$$

В свою очередь, для $\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta}$ имеем

$$\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, g^{0\varphi}(g^{00}g^{\alpha\beta}_{,0} - g^{\alpha 0}g^{\beta 0}_{,0} - g^{\beta 0}g^{\alpha 0}_{,0})(g_{\alpha 0,\beta} + g_{\beta 0,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}) = -\frac{1}{4}\, g^{0\varphi}g^{00}(g^{\alpha\alpha}_{,0}g_{\alpha\alpha,0}). \tag{73}$$

Подставляя (48) в (73), найдем

$$\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta} = g^{0\varphi}g^{00}(\dot{\Phi})^2. \tag{74}$$

Окончательно из (72) и (74) получим

$$-\Gamma^{0\varphi} + \Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta} = 0. \tag{75}$$

Для составляющих поля $g^{0\varphi}$ из (40) имеем

$$g_1^{0\varphi} = 2æ \int\limits_V \frac{\mu_0}{r} \left(U^0 U^{\varphi} - \frac{1}{2}\, g^{0\varphi} \right)^* dV, \tag{76}$$

что дает

$$g_1^{0\varphi} = 2æ \sum_a \frac{m_a}{r_a^*} \frac{\dot{\varphi}_a}{c^2} - æ\Phi \bar{g}^{0\varphi}, \tag{77}$$

где $\bar{g}^{0\varphi}$ — среднее значение $g^{0\varphi}$ по всему пространству. Из (77) для не очень сильных полей с учетом в этом случае $æ\Phi \simeq 1$ и $\bar{g}^{0\varphi} \simeq g^{0\varphi}$ получим

$$g_1^{0\varphi} = \frac{2æ}{1 + æ\Phi} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \frac{\dot{\varphi}_a}{c^2} \simeq æ \sum_a \frac{m_a}{r_a} \frac{\dot{\varphi}_a}{c^2}. \tag{78}$$

Если все вещество в системе Q вращается с одинаковой угловой скоростью $\dot{\varphi}_a = \Omega$, то из (78) получим $g_1^{0\varphi} = \Omega/c^2$.[6]

Таким образом, недиагональный член метрики $g^{0\varphi}$ обусловлен относительным вращением окружающих тел по отношению к выбранной системе отсчета наблюдателя. Если в выбранной системе имеет место равенство

$$\sum \frac{m_a}{r_a} \frac{\dot{\varphi}_a}{c^2} = 0, \tag{79}$$

то система отсчета будет инерциальной по отношению к вращению, что является иллюстрацией выполнения принципа Маха. Более подробно этот вопрос будет проанализирован ниже при рассмотрении классической механики с учетом принципа Маха.

Аналогично для g^{0r} имеем

$$-\Gamma^{0r} = -\frac{1}{4}\, g^{00} g^{r0} \left(\frac{g^2_{00,0}}{g^2_{00}} + \frac{g^2_{rr,0}}{g^2_{rr}} + \frac{g^2_{\vartheta\vartheta,0}}{g^2_{\vartheta\vartheta}} + \frac{g^2_{\varphi\varphi,0}}{g^2_{\varphi\varphi}} \right) + \\ + \frac{1}{4}\, g^{r0} g^{00} g^{rr}_{,0} g_{rr,0} + \frac{1}{4}\, g^{r0} g^{rr} g^{00}_{,0} g_{rr,0}, \tag{80}$$

$$\Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{r}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\, g^{0r} g^{00} (g^{\alpha\alpha}_{,0} g_{\alpha\alpha,0}), \tag{81}$$

[6] Отметим, что найденный недиагональный член $g_1^{0\varphi}$ имеет правильный вид, соответствующий виду $g^{0\varphi} = \Omega/c^2$ метрики во вращающейся системе отсчета с угловой скоростью Ω.

что дает

$$-\Gamma^{0r} + \Gamma^{0\alpha\beta}\Gamma^{r}_{\alpha\beta} = -g^{r0}g^{00}(\dot{\Phi})^2 + g^{0r}g^{00}(\dot{\Phi})^2 = 0. \tag{82}$$

Так что,

$$g_1^{0r} = 2æ \int\limits_V \frac{\mu_0}{r}\left(U^0U^r - \frac{1}{2}g^{0r}\right)dV, \tag{83}$$

откуда получим

$$g_1^{0r} = 2æ\sum_a \frac{m_a}{r_a}\frac{\dot{r}_a^r}{c^2} - æ\Phi\bar{g}^{0r}, \tag{84}$$

где $\bar{g}^{0r}$ — среднее значение g^{0r} по всему пространству, $\ddot{r}_a^r = (\ddot{\mathbf{r}}_{qa}\cdot\mathbf{r})/r$. Из (84) для не очень сильных полей с учетом в этом случае $æ\Phi \simeq 1$ и $\bar{g}^{0r} \simeq g^{0r}$, получим

$$g_1^{0r} = \frac{2æ}{1+æ\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\frac{\dot{r}_a^r}{c^2} \simeq æ\sum_a \frac{m_a}{r_a}\frac{\dot{r}_a^r}{c^2}. \tag{85}$$

2.10. Взаимосвязь космологических параметров.

Выше для выполнения определенных условий на метрику (в частности, на правильное значение сигнатуры метрики) было наложено условие (63)

$$\frac{3}{8\pi c^2}\int\limits_V \frac{1}{r}\,(æ\dot{\Phi}^*)^2\,dV = 1. \tag{63}$$

Выясним, насколько это условие соответствует современным космологическим данным.

Преобразуем выражение $(æ\dot{\Phi}^*)^2$, входящее в (63). Имеем

$$æ\dot{\Phi}^* = æ\left(\sum_a \frac{m_a}{r_a^*}\right)_{,0} = -æ\sum_a \frac{m_a}{r_a^*}\frac{\dot{r}_a^*}{r_a^*}. \tag{86}$$

Множитель $\dot{r}_a^*/r_a^*$ для космологических масштабов является величиной постоянной и равен постоянной Хаббла H

$$\frac{\dot{r}_a^*}{r_a^*} = H, \tag{87}$$

поэтому в (86) он может быть вынесен за знак суммы

$$æ\dot{\Phi}^* = -H\,æ\sum_a \frac{m_a}{r_a^*} = -H\,æ\Phi^*. \tag{88}$$

Это позволяет записать условие (63) в виде

$$\frac{3H^2}{8\pi c^2}\int\limits_V \frac{1}{r}æ^2(\Phi^*)^2\,dV = 1, \tag{89}$$

Если предполагать островной характер Вселенной[7] с радиусом R_0, то условие (89) можно представить в виде

$$\frac{3H^2R_0^2}{4c^2}\,æ^2(\bar{\Phi})^2 = 1, \tag{90}$$

[7]Отметим, что обнаруженная в последнее время т. н. "фрактальность" [11] распределения галактик и их скоплений, включая и наиболее удаленные участки Вселенной, позволяет получать ограниченные значения для интегралов (45) и (63) и без принятия островной модели.

где $\bar{\Phi}$ — среднее значение Φ^* при интегрировании по всему пространству. Учитывая, что величину $æ\bar{\Phi}$ мы можем считать по порядку близкой к 1 (см. (59)), выражение (90) можно представить в виде

$$\frac{H^2 R_0^2}{c^2} \simeq 1. \tag{91}$$

Если $R_0/c = T$ — время жизни Вселенной (или время прохождением светом расстояния от ее периферии), а постоянная Хаббла равна $H = 2,6 \cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$, (современная оценка), то принятое нами условие (63) будет эквивалентно принятию для T значения

$$T \simeq H^{-1} = 4 \cdot 10^{17} \text{ с} = 13 \text{ млрд. лет},$$

соответствующего современным оценкам. Таким образом, принятое условие (63) не противоречит современным космологическим данным.

Рассмотрим также соответствие современным данным принятого в (59) условия $æ\Phi \simeq 1$,[8] или

$$æ\sum \frac{m_a}{r_a^*} \simeq 1 \tag{59*}$$

Если учесть, что $æ \simeq 2G/c^2 = 1.4 \cdot 10^{-28}$ см/г, а в качестве оценки радиуса Вселенной при островной модели принять $R_0 \simeq cT = c/H = 1.2 \cdot 10^{28}$ см, то из условий (45), (59*) мы получим оценку требуемой средней плотности вещества, чтобы выполнялось (59), равную $\mu_0 \simeq 10^{-29}$ г/см. Хотя это и несколько выше оцениваемой из наблюдений величины μ_0, однако является стандартно используемым μ_0 в космологических моделях значением.

3. Уравнения движения в произвольной системе отсчета с учетом принципа Маха

3.1. Об ограничениях на выбор системы отсчета.

Выше мы нашли коэффициенты метрики $g^{\mu\nu}$ в системе отсчета Q, в отношении которой были сделаны предположения, что она в среднем покоится по отношению к микроволновому фону, т. е. в среднем покоится по отношению к окружающему веществу галактик, а также в среднем не вращается относительно окружающего фона звезд. Это было сделано не по каким-то принципиальным мотивам, а с целью упрощения расчетов интегральных добавок от членов $-\Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ к метрике $g^{\mu\nu}$.

Действительно, в этом случае в ковариантном тождестве (37) нам проще строить фоновую метрику $\gamma^{\mu\nu}$, естественным образом наиболее близко сводящуюся к метрике Минковского, что позволяет считать добавки $h^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta}$ в (34), (37) и (40) малыми. Это также позволяет проще использовать формулу Кирхгоффа (36), записанную в специальных координатах, где даламбертиан $\gamma^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}_{,\alpha,\beta}$ имеет стандартный диагональный вид.

Также существенно, что в выражении (40) в члене, связанным с окружающими источниками $\mu_0 U^\mu U^\nu$, мы могли пользоваться нерелятивистскими значениями скоростей, а также упрощать расчеты $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha,\beta}$, используя сферическую симметрию (что при существенном поступательном и вращательном движении координатной системы мы не могли бы сделать).

Тем не менее, в принципе, ничто не мешало бы нам в качестве тела отсчета выбрать произвольно движущееся тело m_q, связав о ним произвольную систему Q

[8] Здесь нужно отметить, что æ — константа, входящая в лагранжиан (60); $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с в теории также является константой, в то время как Φ является величиной полевой и переменной так, что условие (59) $\Phi = c^2/2G$ *при условии* переменности в фоновой метрике значения Φ выполняется за счет такой же переменности в фоновой метрике величины G.

с произвольной (но ковариантно заданной) разбивкой координат. С учетом тождественности соотношений (34), (36) и ковариантности уравнений поля (21) вычисления с помощью (40) дали бы фактически тот же результат, только полученный в новых координатах существенно более сложным образом.

Поскольку расчет значений метрики через движение окружающих тел нами произведен, то на возможность фактически пользоваться неинерциальными системами отсчета при нахождении уравнений движения ограничений не накладывается.

3.2. Уравнения движения в произвольной системе отсчета.

Уравнения движения пробной частицы в заданном поле $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$ имеют вид

$$-\frac{dU^\mu}{ds_b} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\gamma}(g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma})U^\alpha U^\beta, \tag{92}$$

где $U^\mu = dX^\mu_b/ds_b$ — 4-скорость пробной частицы, $ds_b = (g_{\alpha\beta}\, dX^\alpha_b dX^\beta_b)^{1/2}$ — интервал вдоль траектории частицы b. Уравнение (92) имеет место в производной системе отсчета Q с произвольным выбором координат. Для получения решений с помощью (92) требуется предварительно вычислить значения компонент поля $g^{\mu\nu}$ в той же системе отсчета.

Для компонент метрики $g^{\mu\nu}$ из (57), (64), (66) в практически инерциальной системе отсчета $\hat{Q}$ мы имели

$$\hat{g}^{00}_1 = c^{-2}æ\Phi, \quad \hat{g}^{rr}_1 = æ\Phi - 2, \quad \hat{g}^{\vartheta\vartheta}_1 = r^{-2}(æ\Phi - 2), \quad \hat{g}^{\varphi\varphi}_1 = \frac{æ\Phi - 2}{r^2\sin^2\vartheta}, \tag{93}$$

где $\Phi = \sum m_a/r_a$, при этом из (59) $æ\Phi \simeq 1$. Во вращающейся системе для диагональных членов изменится только член $\hat{g}^{\varphi\varphi}_1$, который станет равным

$$g^{\varphi\varphi}_1 = c^{-2}\omega^2 + \frac{æ\Phi - 2}{r^2\sin^2\vartheta}, \tag{94}$$

где ω — угловая скорость вращения окружающего вещества в целом относительно системы отсчета Q ($\omega^2 = æ\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\omega_a^2$).[9]

Принимая во внимание ранее вычисленные недиагональные члены g^{0r} из (85) и $g^{0\varphi}$ из (78), для членов метрики в произвольной системе Q будем иметь

$$\begin{gathered} g^{00}_1 = c^{-2}æ\Phi, \quad g^{rr}_1 = æ\Phi - 2, \quad g^{\vartheta\vartheta}_1 = r^{-2}(æ\Phi - 2), \\ g^{\varphi\varphi}_1 = c^2 æ\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\omega_a^2 + \frac{æ\Phi - 2}{r^2\sin^2\vartheta}, \quad g^{0r}_1 = æ\sum_a \frac{m_a \dot{r}^r_a}{r_a c^2}, \quad g^{0\varphi}_1 = æ\sum_a \frac{m_a\dot{\varphi}_a}{r_a c^2} \end{gathered} \tag{95}$$

(звездочка (*) при r_a опущена).

В уравнения движения помимо исходных тензоров $g^{\mu\nu}$, получаемых из уравнений поля, входят также обратные тензоры $g_{\mu\nu}$ с нижними индексами. Используя определение

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\gamma} = \delta^\gamma_\mu, \tag{96}$$

получим метрику $g_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu} \equiv \check{g}^{-1}A_{\mu\nu}$, где $\check{g}$ — определитель, составленный из $g^{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$ — математическое дополнение для $g^{\mu\nu}$):

$$\begin{gathered} g^1_{00} = \frac{c^2}{æ\Phi} - æ\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\omega_a^2 r^2\sin^2\vartheta, \quad g^1_{rr} = \frac{1}{æ\Phi - 2}, \quad g^1_{\vartheta\vartheta} = \frac{r^2}{æ\Phi - 2}, \\ g^1_{\varphi\varphi} = \frac{r^2\sin^2\vartheta}{æ\Phi - 2}, \quad g^1_{0r} = \frac{-1}{(æ\Phi - 2)\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\dot{r}^r_a, \quad g^1_{0\varphi} = \frac{r^2\sin^2\vartheta}{\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a \end{gathered} \tag{97}$$

---

[9] Это можно вычислить непосредственно из (40), либо убедиться прямой проверкой, вычисляя $g^{\varphi\varphi}_1$ во вращающейся системе с помощью координатного преобразования $\varphi = \hat{\varphi} - \omega t$, $\hat{t} = t$: $g^{\varphi\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^\alpha}\hat{g}^{\alpha\alpha}$, где $\hat{g}^{\mu\nu}$ — метрика из (93).

(остальные $g_{\mu\nu} = 0$; звездочка при r_a опущена).

Как видно, для нахождения $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ из (95) и (97) нам в произвольной системе отсчета Q требуется ввести произвольную систему координат X^α, в ней операционно (с помощью заданной процедуры) ввести фоновое мероопределение $\gamma_{\alpha\beta}$, с помощью которого каждому положению тела m_a мы предписываем значение "расстояния" r_a; при этом положение тела характеризуется также углами ϑ_a и φ_a, и моментом времени t_a. Для получения полей из (40), а следовательно, и из (95), (97) нам требуются "запаздывающие" значения r_a и Φ в момент $t_a^* = t - r_a/c$; именно их и получает непосредственно наблюдатель в качестве информации в момент t.

Получив информацию и вычислив с помощью (95), (97) гравитационные поля, с помощью (92) можно получить явный вид уравнений движения и по заданным условиям вычислить явный вид траектории в выбранной системе отсчета Q. При этом во всех рассуждениях мы не обращались к информации о движении нашей системы отсчета Q относительно инерциальной системы Q_0; указанная информация оказывается лишней.

4. Классическая механика с учетом принципа Маха

Используя найденную метрику, получим ньютонов предел для уравнений механики в произвольной системе отсчета. Принимая, что скорости описываемых тел малы по сравнению со скоростью света, а также для простоты рассматривая движение тел в плоскости $\vartheta = \pi/2$, из (92) получим

$$-\frac{dU^\varphi}{ds} = \Gamma^\varphi_{00} U^0 U^0 + 2\Gamma^\varphi_{0r} U^0 U^r + 2\Gamma^\varphi_{r\varphi} U^r U^\varphi. \tag{98}$$

Остальными членами в (98) можно пренебречь, ввиду $U^\vartheta = 0$, практической статичности полей ($\Phi_{,0} \simeq 0$, что дает $g_{rr,0} = g_{\vartheta\vartheta,0} = g_{\varphi\varphi,0} = 0$), а также принятой изотропности полей ($g_{\mu\nu,\varphi} \simeq 0$; если имеется одиночное тяготеющее тело, то оно помещено в начало координат).

Заменяя в (98) ввиду малости скоростей: $U^0 \simeq 1/c$, $U^\varphi \simeq \dot\varphi/c$, $U^r \simeq \dot r/c$, $dU^\varphi/ds \simeq c^{-2}\ddot\varphi$, получим

$$-\ddot\varphi c^{-2} = g^{\varphi\varphi} g_{\varphi 0,0} + g^{\varphi\varphi} g_{\varphi 0,r}\dot r + (g^{\varphi 0} g_{0\varphi,r} + g^{\varphi\varphi} g_{\varphi\varphi,r})\dot r\dot\varphi. \tag{99}$$

Подставляя сюда значения $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\rho\sigma}$ из (95) и (97), а также принимая в (95) и (97): æ$\Phi \simeq 1$, æ$\Phi - 2 \simeq -1$, $\sin\vartheta = 1$, $\omega_a^2 r^2/c^2 \ll 1$, получим уравнение движения для φ-компоненты траектории

$$\ddot\varphi = \frac{2\dot r}{r\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\dot\varphi_a + \frac{1}{\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\ddot\varphi_a - \frac{2\dot r\dot\varphi}{r},$$

или

$$\ddot\varphi = \frac{2\dot r}{r}\left(\frac{1}{\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\dot\varphi_a - \dot\varphi\right) + \frac{1}{\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\ddot\varphi_a. \tag{100}$$

В еще более сокращенной записи (Ω — угловая скорость вращения окружающей материи):

$$\ddot\varphi = -2\,\frac{\dot r}{r}\,(\dot\varphi - \Omega) + \dot\Omega, \tag{101}$$

что полностью соответствует (2).

Первый член в (100) — кориолисова сила, связанная с вращением траектории относительно вращения в целом окружающей материи. Последний член — угловое ускорение, связанное с неравномерностью вращения системы относительно окружающей материи.

Если $\sum \frac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a = 0$ и $\sum \frac{m_a}{r}\,\ddot{\varphi}_a = 0$, т. е. окружающая материя в целом не вращается и не ускоряется во вращении относительно системы отсчета, то на пробное тело не будет оказываться каких-либо инерционных сил, и получающееся в этом случае уравнение

$$-\ddot{\varphi} = \frac{2\dot{r}}{r}\,\dot{\varphi} \tag{102}$$

будет описывать φ-компоненту траектории свободного поступательного движения.

Аналогично получаем ньютонов предел уравнения движения для радиальной части. Так же, как и в случае (98), из всех членов уравнения (92) останутся только члены вида

$$-\frac{dU^r}{ds} = \Gamma^r_{00}U^0U^0 + 2\Gamma^r_{0\varphi}U^0U^\varphi + \Gamma^r_{\varphi\varphi}U^\varphi U^\varphi. \tag{103}$$

Производя, как и выше, замену 4-скоростей на их нерелятивистские значения, получим

$$-\ddot{r} = g^{rr}g_{r0,0} - \frac{1}{2}\,g^{rr}g_{00,r} - g^{rr}g_{0\varphi,r}\,\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\,g^{rr}g_{\varphi\varphi,r}\,(\dot{\varphi})^2. \tag{104}$$

Подставим в (104) значения метрики из (95) и (97). Отбрасывая величины второго порядка малости, получим

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\ddot{r}^r_a - \frac{c^2}{2\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a^2}\frac{\partial r_a}{\partial r} + r\text{æ}\sum \frac{m_a}{r_a}\omega_a^2 - \frac{2r\dot{\varphi}}{\Phi}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\,\dot{\varphi}_a + r(\dot{\varphi})^2. \tag{105}$$

Если принять, что окружающее вещество, в целом, неподвижно, а его движение и вращение в системе вызвано неинерциальным движением самой системы отсчета, то в (105) $\ddot{r}_a$, $\dot{\varphi}_a$ можно вынести за знак сумм, и выражение (105) запишется как

$$\ddot{r} = G\Phi_{,r} - \ddot{r}_a + r(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi})^2. \tag{106}$$

В уравнении (106), записанном в произвольной системе отсчета, слева стоит радиальное ускорение пробной частицы, первый член справа — ньютонова гравитационная сила со стороны окружающих масс, второй член — поступательное ускорение, индуцированное поступательным ускорением окружающих масс по отношению к телу отсчета, третий член — центробежное ускорение, индуцированное вращением окружающих масс по отношению к траектории пробной частицы. Если скорость поворота траектории $\dot{\varphi}$ и скорость вращения окружающих масс $\dot{\varphi}_a$ совпадают, то последний член равен нулю, и центробежной силы не возникает.

Из (100) и (105) мы можем получить условия "инерциальности системы отсчета"

$$\sum_a \frac{m_a}{r}\,\ddot{r}^r_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r}\,\dot{\varphi}_a = 0, \quad \sum_a \frac{m_a}{r}\,\ddot{\varphi}_a = 0, \tag{107}$$

означающие, что окружающая материя по отношению к системе, в целом, движется не ускоренно, не вращается и не ускоряется во вращении.

Как видно из самой записи, для произвольных движений окружающей материи условия (107) являются только локальными. А именно, для каждого репера они имеют место только в ограниченной 4-области, и не позволяют построить в общем случае единый инерциальный репер. Нельзя в этом случае также построить общий репер хотя бы с едиными условиями инерциальности на бесконечности.

Единственный (но не реализуемый) случай, когда можно было бы ввести универсальную инерциальную систему отсчета — это случай неподвижного распределения окружающих масс.

Использование "маховских" уравнений движения не ставит указанных проблем.

Заключение

Рассмотрим основные результаты, даваемые введением в ОТО принципа Маха.

Во-первых, этим решается основная методологическая проблема, относительно чего должна правильно двигаться система отсчета, чтобы она была инерциальной. Ответ (не только качественный, но и количественный): относительно окружающих тел (условия (107)).

Во-вторых, введение принципа Маха в ОТО позволяет из ее уравнений в качестве нерелятивистского предела получить уравнения классической механики в произвольной системе. Т. е. классическая механика формулируется без введения инерциальной системы, используя только относительные движения тел. Этим уже на уровне классической механики реализуется "общий принцип относительности", сформулированный Э. Махом и А. Эйнштейном.[10]

В третьих, основные классические решения ОТО становятся уже не столь обоснованными и бесспорными, т. к. основополагающее предположение при их выводе — метрика Минковского на бесконечности — в ОТО с принципом Маха не имеет места, а заменяется только на приближенное условие метрики Минковского на достаточно большом удалении от тяготеющих масс. Это касается прежде всего решения Шварцшильда, которое как точное в данной теории не имеет места. В связи с этим в ОТО с принципом Маха при коллапсе отсутствует переход в состояние "черной дыры". Однако этот вопрос требует отдельного детального рассмотрения.

И, наконец, в теории получается ряд соотношений, объединяющих некоторые фундаментальные константы, а именно (59), (91). В частности, из (59) следует

$$G = \frac{c^2}{2\Phi},$$

где c — константа. Ввиду этого G, в данном выражении — это "кавендишева" G_k гравитационная "постоянная".[11] Соотношение (59) дает зависимость G_k от Φ и приводит к нарушению сильного принципа эквивалентности [13]. Таким образом, сильный принцип эквивалентности в данной теории не имеет места. Это показывает, что этот принцип не является генетически необходимым для ОТО и для реализации "общего принципа относительности". Мало того, указанное соотношение $G_k \sim \Phi^{-1}$, как показано в работе [13], соответствует современным наблюдательным данным по собственному вращению Земли.

[10] Видно, что критика Фоком "общего принципа относительности" [9], за невозможность и бессодержательность требования инвариантности уравнений к общей группе преобразований (что верно) была не по адресу и связана с непониманием содержания самого принципа Маха (в уравнения должны входить только относительные движения). Это, конечно, связано с первоначальным ошибочным мнением, что ОТО ставила цель развития тех же принципов, что были заложены в СТО (требование инвариантности к группе Лоренца-Пуанкаре).

[11] Кавендишева гравитационная "постоянная" G_k локально определяется по отношению гравитационных и электромагнитных сил $G_k \sim f_g/f_e$, например, в опыте Кавендиша с крутильными весами, где силе тяготения f_g между двумя массами противодействует сила упругости f_e электромагнитной природы. Принимая $c = \text{const}$, мы, тем самым, используем электромагнитные единицы, в которых считаем электромагнитные силы не зависящими от Φ; при этом зависимость f_g/f_e от Φ переносится на f_g а, тем самым, и на G_k.

Приложение 1. К ковариантному построению стандартной системы отсчета наблюдателя с фоновой метрикой

Выше большинство вычислений (в том числе интегрирование в искривленном физическом пространстве) мы проводили в специальной системе отсчета наблюдателя с плоской фоновой метрикой, которую будем называть *стандартной системой координат* X^α. Чтобы это имело однозначный смысл, необходимо предъявить ковариантную процедуру ее однозначного построения.

Зададим сначала ковариантную процедуру построения *хронометрических координат*, из всего класса которых впоследствии выделим стандартные координаты. Указанные *хронометрические* координаты X^α, например, декартовы t, X, Y, Z, сферические t, r, ϑ, φ будем строить следующим образом: выбираем произвольное тело отсчета Q. Наблюдателя в Q снабжаем необходимыми эталонами и часами для измерения t, r, ϑ, φ. В Q определим процедуры измерения расстояний r, угловых положений ϑ, φ и моментов времени t для тела m_a следующим образом. В начало координат, связанное с телом отсчета Q, помещаем стандартно идущие часы (например, атомные). По указанным часам в 4-точке Q' в момент t' посылаем световой сигнал по направлению к телу m_a, находящемуся в точке A, который после отражения в A регистрируется наблюдателем в 4-точке Q. Направление прихода в Q светового луча от m_a при фиксации координатных осей в Q дает угловые сферические координаты ϑ_a и φ_a положения тела m_a. Пусть интервал времени $\Delta t = t - t'$, связанный с посылкой сигнала и необходимый для прохождения светом пути "туда" из Q' в A и "обратно" Q равен Δt_a. Тогда *момент времени* t_a^*, соответствующий отражению света в A и *расстояние* r_a^*, до m_a в момент t_a^* определяем в виде

$$t_a^* \equiv t_q - \frac{1}{2c}\,\Delta t_a, \quad r_a^* \equiv t_q - \frac{1}{2}\,c\Delta t_a; \tag{П1.1}$$

где t_q — момент посылки сигнала наблюдателем из Q, c — скорость света. Тем самым мы получаем операционно заданные *хронометрические сферические координаты* t, r, ϑ, φ (значок $(^*)$ далее не ставим). Указанные хронометрические координаты в произвольной системе отсчета Q использованы нами в разделах 3 и 4 (формулы (95), (97), (100), (105)).

От хронометрических сферических координат мы можем далее перейти к *хронометрическим декартовым координатам*

$$X^0 = t, \quad X^1 = X = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad X^2 = Y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad X^3 = Z = r\cos\vartheta. \tag{П1.2}$$

Если теперь в качестве тела отсчета Q_0 мы будем брать тело, которое в среднем не вращается и не движется поступательно относительно окружающего фона галактик (в Q_0 микроволновый фон изотропен), и по указанному выше рецепту построим систему хронометрических координат, то это будет *стандартная система координат* X^α.

Теперь в Q_0 для стандартных декартовых координат задаем плоскую *фоновую метрику* $\gamma^{\mu\nu}$ с помощью определения: $\gamma_0^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1)$. В частности, имеем $r_{qa}^2 \equiv \gamma_{ik}^0 X_a^i X_a^k$. Для сферических стандартных координат фоновая метрика будет $\gamma_0^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -r^{-2}, -r^{-2}\sin^{-2}\vartheta)$. Указанные координаты использованы в разделе 2 (формулы (27)–(31), (47)–(56)), а вместе с фоновой метрикой использованы в формулах (34), (36), (38)–(40).

Следует отметить, что при координатной привязке больших областей пространства вместо светолокационного хронометрического способа измерения расстояния r используют триангуляционный способ, основанный на измерении параллакса звезд при движении Земли по орбите вокруг Солнца. А еще для более дальних расстояний

— косвенные способы, основанные на измерении яркости стандартных звездных и галактических источников (метод стандартной свечи).

И наконец, возвращаясь к хронометрическому способу, если в системе Q первоначально задана произвольная арифметизация $[x^\alpha]$ 4-точек пространства, и с помощью световых измерений и измерений над пробными телами определена физическая метрика $g_{\mu\nu}$, то хронометрические координаты t_a и r_a могут быть получены с помощью выражений

$$r_a^* \equiv \frac{1}{2} s_{q'q} = \frac{1}{2} \int\limits_{q'}^{q} (g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}, \tag{П1.3}$$

$$t_a^* \equiv t_q - \frac{1}{2c}\, s_{q'q} = t_q - \frac{1}{2c} \int\limits_{q'}^{q} (g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}, \tag{П1.4}$$

где $s_{q'q}$ — интервал по 4-траектории $x^\alpha = x^\alpha(s)$ тела отсчета Q между посылкой светового сигнала из 4-точки Q' в A и его приемом в 4-точке Q, а ϑ_a^* и φ_a^* определяются по угловому положению приходящего от A светового сигнала. Задание хронометрических координат в (П1.3), (П1.4) *ковариантно* в том смысле, что не зависит от выбора первоначальной арифметизации пространства с помощью координат x^α.

Приложение 2. Вариант маховской гравитационной теории с дополнительным скалярным полем

В работе [12] предложен вариант маховской гравитационной теории, в которой в лагранжиан ОТО для получения правильной сигнатуры метрики $g^{\mu\nu}$ включено дополнительное свободное скалярное поле ψ

$$L = -8\pi\mu_0 + \frac{R}{æ} - A(\psi)\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha}, \tag{П2.1}$$

где $A(\psi)$ — функция поля ψ. При этом на поле ψ накладывается условие статичности $\dot{\psi} = 0$. Уравнения поля для $g^{\mu\nu}$ и ψ

$$R^{\mu\nu} = -4\pi\mu_0 æ (U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}) + æ A \psi^{,\mu}\psi^{,\nu}, \tag{П2.2}$$

$$(A\psi^{,\beta}); \beta + A_{,\psi}\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} = 0 \tag{П2.3}$$

дают решения

$$g_1^{00} = æ c^{-2} \int\limits_V \frac{\mu_0^*}{r}\, dV, \quad g_1^{ii} = æ \int\limits_V \frac{\mu_0^*}{r}\, dV - \frac{æ}{2\pi} \int\limits_V \frac{1}{r}\, A^* (\psi_{,i}^*)^2\, dV. \tag{П2.4}$$

При этом для правильной сигнатуры g^{ii} принимается условие, аналогичное (63)

$$\frac{æ}{4\pi} \int\limits_V \frac{1}{r}\, A^* (\psi_{,i}^*)^2\, dV = 1 \tag{П2.5}$$

только в этом случае используется не временное, а пространственное изменение поля. Поскольку в этом случае на образование метрики влияет не только распределение и движение окружающих тел m_a, но и скалярное поле ψ, указанный вариант теории удовлетворяет т. н. "слабому" принципу Маха (в отличие от сильного принципа Маха, имеющего место в развиваемой выше теории). Характерно, что маховские уравнения движения для классической механики в указанной теории [12] имеют тот же вид, что и в данной теории — (100), (105).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньютон И.* "Математические начала натуральной философии" М.-Л., *1936*.
2. *Mach E.* Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 9 Aufl., F.A. Brockhaus, Leipzig, *1933*.
3. *Einstein A.* Annal. d. Phys. 55, 241 (*1918*).
4. *Р. Дикке* в сб. "Гравитация и относительность" под ред. Х. Цзю и В. Гоффмана, М., "Мир", *1965*, с. 221–250.
5. *Sciama D.W.* Roy. Astron. Soc. Monthly Notices, 113, 34 (*1953*).
6. *Treder H.-J.* "Die Relativität der Trägheit". Academie-Verlag, Berlin 1972; русский перевод: *Тредер Г.Ю.* "Относительность инерции". М., Атомиздат, *1975*, 128 с.
7. *Хёнль Г.* "Эйнштейновский сборник 1968". М., "Наука", *1968*, с. 258-285.
8. *Дикке Р.* "Эйнштейновский сборник 1969–1970". М., "Наука", *1970*, с. 108–139.
9. *Фок В.А.* "Теория пространства, времени и тяготения" Ф.-М., М., *1961*, 563 с.
10. *Смирнов В.И.* "Курс высшей математики" Т. II, М., "Мир", *1979*.
11. *Федер Е.* "Фракталы" М., "Мир", *1991*.
12. *Анисович К.В.* Труды XII семинара "Проблемы физики высоких энергий и теории поля" Протвино. 3–7 июля 1989 г., М., Наука, *1990*, с. 59–72.
13. *Анисович К.В.* Гравитация (*1995*), Т. 1, Вып. 1, с. 59–65.