ГРАВИТАЦИЯ Том 1 Выпуск 1 1995
Дискуссионный журнал по проблемам гравитационной физики .... *page 39–43*

ЭНЕРГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

ЭНЕРГИЯ СТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ–СИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ В ГРАВИДИНАМИКЕ

С.А. Ощепков

Содержание

§ 1. Введение

Основы полевого подхода к гравитации заложены в работах А. Пуанкаре [9], Г. Биркгофа [10] и В. Тиринга [11]. Полевая теория гравитации (гравидинамика) развивалась в работах Барышева Ю.В. и Соколова В.В. [1–8]. В гравидинамике гравитационное поле описывается как тензорное поле второго ранга Ψ^{ik} в плоском пространстве-времени Минковского. Из требования калибровочной инвариантности уравнений поля лагранжиан $\mathcal{L}_{(g)}$ гравитационного поля, связанного с источниками, выбран в виде:

$$\mathcal{L}_{(g)} = -\frac{1}{16\pi G}\,[\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4], \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = 2\Psi_{mn}{}^{;n}\Psi^{lm}{}_{;l}, \qquad \mathcal{L}_2 = -\Psi_{mn;l}\Psi^{mn;l}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}_3 = -2\Psi_{mn}{}^{;m}\Psi^{;n}, \qquad \mathcal{L}_4 = \Psi_{;n}\Psi^{;n}. \tag{1.3}$$

Лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{(mg)}$ определяется принципом универсальности гравитационного взаимодействия и постулируется в виде:

$$\mathcal{L}_{(mg)} = -\frac{1}{c^2}\,\Psi_{ik}T^{ik}_{(\Sigma)}, \tag{1.4}$$

где $T^{ik}_{(\Sigma)}$-полный тензор энергии-импульса (ТЭИ) любой материальной системы. Из закона сохранения энергии-импульса $T^{ik}_{(\Sigma);k} = 0$ следует калибровочная инвариантность $\mathcal{L}_{(mg)}$. Соответственно, уравнения поля в калибровке Гильберта–Лоренца

$$\Psi^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{2}\,\Psi^{;i} \tag{1.5}$$

принимают вид:

$$\Box(\Psi^{ik} - \frac{1}{2}\eta^{ik}\Psi) = \frac{8\pi G}{c^2} T^{ik}_{(\Sigma)}, \tag{1.6}$$

где η^{ik} — метрический тензор в псевдо-эвклидовом пространстве-времени Минковского. Отметим, что калибровка Гильберта–Лоренца (1.5), непосредственно, через уравнения поля (1.6), дает закон сохранения энергии-импульса источника.

Данные уравнения поля (1.6) с соответствующими уравнениями движения, естественным образом, описывают класические гравитационные эксперименты [1, 2, 5, 6, 8]. При этом, следуя Гупте [12] и Тиррингу [11], в полный ТЭИ $T^{ik}_{(\Sigma)}$ входит и само гравитационное поле как источник, и уравнения поля (1.6) решаются итерациями.

§ 2. Законы сохранения

Получим для тензорного поля второго ранга Ψ_{ik}, согласно общим правилам лагранжевого формализма, законы сохранения и выражения для канонического ТЭИ, ТЭИ Гильберта, а также тензор спина. Действие для лагранжиана поля запишем в общем виде как

$$S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\Omega\ \mathcal{L}(g_{ik}, \partial_n g_{ik}, g^{ik}, \partial_n g^{ik}, \Psi_{ik}, \partial_n \Psi^{ik}). \tag{2.1}$$

Рассмотрим бесконечно малое преобразование системы координат

$$x'^k = x^k + \delta x^k, \tag{2.2}$$

где δx^k — бесконечно малый 4-вектор. В силу инвариантности действия, как скаляра, при преобразованиях координат получаем

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega'} d\Omega'\ \mathcal{L}'(x') - \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\ \Omega\mathcal{L}(x) = 0, \tag{2.3}$$

и, так как якобиан J преобразований (2.2) есть

$$J = 1 + \partial_k \delta x^k, \tag{2.4}$$

то

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\Omega\left[\delta_L \mathcal{L}(x) + \partial_k(\delta x^k \mathcal{L}(x)\right], \tag{2.5}$$

где $\delta_L \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$ — вариация Ли. Она, соответственно, равна

$$\begin{aligned}\delta_L \mathcal{L}(x) \quad = \quad & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ik}}\,\delta_L g_{ik} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ik,n}}\,\delta_L g_{ik,n} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ik}}\,\delta_L g^{ik} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {g^{ik}}_{,n}}\,\delta_L {g^{ik}}_{,n} + \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^{ik}}\,\delta_L \Psi^{ik} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\Psi^{ik}}_{,n}}\,\delta_L {\Psi^{ik}}_{,n},\end{aligned} \tag{2.6}$$

и, так как $\delta_L g^{ml} = -g^{il} g^{km}\,\delta_L g_{ik}$, то

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\Omega\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^{ik}}\,\delta_L \Psi^{ik} + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ik}} - g^{il} g^{km}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{lm}}\right)\delta_L g_{ik} + \partial_n J^n\right], \tag{2.7}$$

где

$$J^n = \mathcal{L}\,\delta x^n + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ik,n}}\,\delta_L g_{ik} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {g^{ik}}_{,n}}\,\delta_L g^{lm} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\Psi^{ik}}_{,n}}\,\delta_L \Psi^{ik} \tag{2.8}$$

и $\delta\mathcal{L}/\delta X = \partial\mathcal{L}/\partial X - \partial_n(\partial\mathcal{L}/\partial X_{,n})$ — вариационная производная Эйлера. Плотность Лагранжиана $\mathcal{L}$ является плотностью скаляра веса $+1$, следовательно, вектор J^n — есть 4-вектор веса $+1$, тогда $\partial_n J^n = D_n J^n$. Из закона преобразования тензоров получаем

$$\delta_L g_{ik} = -g_{il}\partial_k \delta x^l - g_{kl}\partial_i \delta x^l - \delta x^l \partial_l g_{ik} = -g_{il} D_k \delta x^l - g_{kl} D_i \delta x^l \tag{2.9}$$

и

$$\delta_L \Psi_{ik} = -\Psi_{il}\partial_k \delta x^l - \Psi_{kl}\partial_i \delta x^l - \delta x^l \partial_l \Psi_{ik} = -\Psi_{il} D_k \delta x^l - \Psi_{kl} D_i \delta x^l - \delta x^l D_l \Psi_{ik} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.7), определяем ТЭИ Гильберта как

$$T^{ik} = -2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{ik}} - g^{il} g^{km} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{lm}}\right), \tag{2.11}$$

и, используя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\Omega \left[-\delta x^l \left(D_k T^k_l + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{ik}} D_l \Psi^{ik} + 2D_m\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{lk}}\Psi^{mk}\right)\right) + \right. \\ &\left. + D_n \left(J^n + T^n_l \delta x^l + 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{ik}}\Psi^{in}\delta x^k\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Раскрывая вариации Ли в выражении (2.8) для вектора J^n согласно формулам (2.9) и (2.10) и группируя члены при δx^l и $D_n \delta x^l$, имеем

$$J^n + 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{ik}}\Psi^{in}\delta x^k = -\tau^n_l \delta x^l - \sigma^{nk}_l D_k \delta x^l, \tag{2.13}$$

где

$$\tau^n_l = -\mathcal{L}\delta^n_l + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{ik}_{\ \ ,n}} D_l \Psi^{ik} - 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{il}}\Psi^{in} \tag{2.14}$$

есть канонический тензор энергии-импульса, а

$$\sigma^{nk}_l = 2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\partial g_{ik,n}} g_{il} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial g^{li}_{\ \ ,n}} g^{ki} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial\Psi^{il}_{\ \ ,n}}\Psi^{ik}\right) \tag{2.15}$$

тензор спина. Раскрывая ковариантную дивергенцию в выражении (2.12), окончательно получим

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\Omega \left[-\delta x^l \left(D_n \tau^n_l + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{ik}} D_l \Psi^{ik} + 2D_m\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{lk}}\Psi^{mk}\right)\right) + \right. \\ &\left. + D_n \delta x^l \left[-\tau^n_l + T^n_l - D_k \sigma^{kn}_l\right] - \sigma^{nk}_l D_n D_k \delta x^l\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

При произвольных δx^l, получаем искомые сильные законы сохранения

$$D_n \tau^n_l + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{ik}} D_l \Psi^{ik} + 2D_m\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^{lk}}\Psi^{mk}\right) = 0, \tag{2.17}$$

$$T^n_l - \tau^m_l - D_k \sigma^{kn}_l = 0. \tag{2.18}$$

Если учесть уравнения поля $\delta\mathcal{L}/\delta\Psi^{ik} = 0$, то получаются слабые законы сохранения энергии и импульса

$$D_n \tau^n_l = D_n T^n_l = 0, \tag{2.19}$$

$$T^n_l - \tau^m_l = D_k \sigma^{kn}_l. \tag{2.20}$$

Отметим, что эти слабые законы сохранения будут выполняться в двух случаях: 1) свободного поля $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(g)}$ или 2) связанного поля $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(g)} + \mathcal{L}_{(mg)}$ (вне тела, при этом под τ_l^n и T_l^n понимаются чисто гравитационные ТЭИ поля).

§ 3. Энергия поля

Канонический ТЭИ поля.

Канонический ТЭИ поля, получаемый из лагранжиана $\mathcal{L}_{(g)}$ (1.3) по формуле (2.14), имеет вид [1]:

$$\tau_{(g)}^{ik} = \frac{1}{8\pi G}\left(\Psi^{lm;i}\Psi_{lm}{}^{;k} - \frac{1}{2}\eta^{ik}\Psi_{lm;n}\Psi^{lm;n} - \frac{1}{2}\Psi^{;i}\Psi^{;k} + \frac{1}{4}\eta^{ik}\Psi_{;l}\Psi^{;l}\right). \tag{3.1}$$

Для гравидинамики характерно то, что данный канонический ТЭИ является симметричным.

В первом приближении, гравитационное поле для статического сферически-симметричного случая, когда $T_{(\Sigma)}^{ik} = T_{(m)}^{ik} = mc^2\delta(\mathbf{r})$, получаемое из уравнений поля (1.6), есть:

$$\Psi^{ik} = \varphi_{(N)}\delta^{ik}, \tag{3.2}$$

где $\varphi_{(N)} = -GM/R$ — ньютоновский потенциал. Этот потенциал впервые был получен Г. Биркгофом [10]. Этот биркгофовский потенциал дает нам соответствующую энергию гравитационного поля [1]:

$$\tau_{(g)}^{oo} = +\frac{1}{8\pi G}\,(\nabla\varphi_{(N)})^2. \tag{3.3}$$

Необходимо отметить, что полученная энергия является не только положительно определенной и ее зависимость от потенциала аналогична соответствующей зависимости для векторного поля (электродинамики), но и является экспериментально проверенной величиной в рамках гравидинамики, ибо эта энергия гравитационного поля, входя источником в правую часть уравнений поля во втором приближении теории, дает недостающие $7''$ в столетие для смещения перигелия Меркурия, т. е. около 16 % всего эффекта.

ТЭИ Гильберта.

Тензор энергии-импульса Гильберта (2.11) для $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathcal{L}_{(g)}$, где $\mathcal{L}_{(g)}$ определяется согласно выражению (1.1), в калибровке Гильберта–Лоренца (1.5) в псевдоэвклидовых координатах пространства-времени Минковского имеет вид:

$$\begin{aligned} T_{(g)}^{pq} = -\frac{1}{16\pi G}\,[\Psi^{,q}\Psi^{,p} - \frac{1}{2}\eta^{pq}\Psi_{,n}\Psi^{,n} + \eta^{pq}\Psi_{lm,n}\Psi^{lm,n} - 2\Psi_{lm}{}^{,p}\Psi^{lm,q} + 2\Psi^{,p}_{,n}\Psi^{qn} + \\ +2\Psi^{,n}_{,n}\Psi^{pq} - 4\Psi^{p,q}_{m,n}\Psi^{qm} - 4\Psi^{p,q}_{m,n}\Psi^{nm} - 2\Psi^{p,q}_{m}\Psi^{,m} + 4\Psi^{n,q}_{m}\Psi^{pm}_{,n}]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для потенциала Биркгофа (3.2), т. е. для статического сферически-симметричного случая вне тела плотность энергии равна

$$T_{(g)}^{oo} = +\frac{1}{8\pi G}\,(\nabla\varphi_{(N)})^2 \tag{3.5}$$

что совпадает с вычислением по τ^{oo} (3.3). Полученный результат, согласно (2.20), определяет дивергенцию тензора спина для σ_o^{ko}-компонента равную нулю, что имеет место и в электродинамике.

§ 4. Заключение

В гравидинамике плотность энергии гравитационного поля ε для статического сферически-симметричного случая, определенная через канонический ТЭИ и ТЭИ

Гильберта, одинакова и равна:

$$\varepsilon = +\frac{1}{8\pi G}\,(\nabla\varphi_{(N)})^2. \tag{4.1}$$

Псевдо-тензор энергии-импульса ОТО, определенный по Ландау, дает для плотности энергии статического сферически-симметричного поля:

$$T^{oo}_{(GR)} = -\frac{7}{8\pi G}\,(\nabla\varphi_{(N)})^2. \tag{4.2}$$

Характерно, что в работах Тирринга [11], Кавальери и Спинелли [13], при рассмотрении сходимости полевого подхода к ОТО, используется лагранжиан поля, отличающийся от $\mathcal{L}_{(g)}$ (1.1) дивергентной добавкой, а именно, вместо $\mathcal{L}_2$ (1.2) рассматривается:

$$\mathcal{L}'_2 = 2\Psi_{mn}{}^{;l}\Psi^{ln}{}_{;m}, \tag{4.3}$$

где $\mathcal{L}'_2$ — является пятым и последним инвариантом, составленным из первых производных потенциалов поля. Для такого лагранжиана поля $\mathcal{L}'_{(g)} = -\frac{1}{16\pi G}\,[\mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4]$ вычисления действительно дают:

$$T'^{oo} = -\frac{7}{8\pi G}(\nabla\varphi_{(N)})^2. \tag{4.4}$$

Следовательно, дивергентная поправка к лагранжиану поля изменяет ТЭИ Гильберта.

Расхождения между гравидинамикой и ОТО в первом порядке теории для плотности энергии поля, а также различные позиции по вопросам о существовании скалярных гравитационных волн [3] и устойчивости сверхмассивных звезд [8], позволяют утверждать, что полевая теория гравитации — гравидинамика, основная на лагранжиане поля $\mathcal{L}_{(g)}$ (1.1), приводит к иной, отличной от ОТО, нелинейной релятивистской теории гравитационного поля.

Автор выражает благодарность Барышеву Ю.В. и Соколову С.Н. за обсуждение с ним данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов В.В., Барышев Ю.В.* Теоретико-полевой подход к гравитации. Тензор энергии-импульса поля. // Гравитация и теория относительности, Каз. Гос. Унив., *1980*.
2. *Барышев Ю.В., Соколов В.В.* Релятивистская тензорная теория гравитационного поля в плоском пространстве-времени. // Труды АО ЛГУ, Т. 38, С. 36–61, *1983*.
3. *Барышев Ю.В.* О гравитационном излучении двойной системы с пульсаром PSR 1913 + 16. // Астрофизика, Т. 18, Вып. 1, С. 93–99, *1982*.
4. *Барышев Ю.В., Соколов В.В.* Некоторые астрофизические следствия динамической трактовки гравитации. // Астрофизика, Т. 21, Вып. 2, С. 361–366, *1984*.
5. *Барышев Ю.В.* Уравнения движения пробных частиц в лоренц-ковариантной тензорной теории гравитации. // Вестник ЛГУ, Сер. 1, Вып. 4, С. 113–118, *1986*.
6. *Барышев Ю.В.* Законы сохранения и уравнения движения в полевой теории гравитации. // Вестник ЛГУ, Сер. 1, Вып. 2, С. 80–85, *1988*.
7. *Sokolov V.V.* Linear and nonlinear gravidynamics: static field of a collapsar. // Astroph. and Space Sci., V. 191, P. 231–258, *1992*.
8. *Барышев Ю.В.* // Теория гравитационного поля: основания и астрофизические следствия. В печати.
9. *Poincare H.* // Bull. des Sciences Math., V. 28, Ser. 2, P. 302–328, *1904*.
10. *Birkhoff G.D.* Flat space-time and gravitation. // Proceed. Nat. Acad. Sci., Vol. 30, № 10, P. 324–334, 1944.
11. *Thirring W.E.* An alternative approach to the theory of gravitation. // Ann. of Phys., Vol. 16, P. 96–117, *1961*.
12. *Gupta S.* // Rev. Mod. Phys., Vol. 29, P. 334, *1957*.
13. *Cavalleri G. and Spinelli G.* Field-Theoretic Approach to Gravity in the Flat Space-Time. // Rivista del Nuovo Cimento, Vol. 3, № 8, P. 1–92, *1980*.