ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 2 1996
Журнал по дискуссионным проблемам гравитационной физики .... *стр. 40–58*

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В.Е. Тирринг*

При построении теории гравитации с использованием безмассового тензорного поля с соблюдением всех аксиом теории поля, мы обнаруживаем большое сходство с электродинамикой. Уравнения поля требуют наличия сохраняющегося источника и допускают калибровочную группу. Тем не менее, уравнения движения частиц являются калибровачно-инвариантными только, если калибровочные преобразования поля дополняются линейными преобразованиями координат. Как следствие, исходная псевдо-эвклидовая метрика не является калибровочным инвариантом и, следовательно, ненаблюдаема. Мы можем определить калибровочно-инвариантную метрику, исследуя воздействие гравитационного поля на реальные линейки и часы. Эта «ренормализованная» метрика, которая непосредственно определяется наблюдаемыми величинами, соответствует метрике ОТО. Выделяя определенную калибровку граничными условиями, мы получаем ньютоновскую теорию в первом приближении. В этой «ренормализованной» картине эффект гравитационного потенциала состоит в изменении эффективного заряда и массы частиц, а не метрики. Присутствие других масс уменьшает заряд и увеличивает массу в соответствии с принципом Маха. Три наблюдаемых эффекта ОТО могут быть легко интерпретированы в обеих картинах — ренормализованной и неренормализованной, — при условии, что эти каритны применяются строго раздельно.

Содержание

1. Введение

Проблема гравитации была решена Эйштейном в его общей теории относительности, которая остается одним из наиболее выдающихся достижений человеческого ума. Любой дальнейший вклад в эту область является с необходимостью педагогическим или интерпретирующим. Однако неоднократно высказывалось мнение,

*Иститут теоретической физики, Венский университет, Вена, Австрия. Перевод с оригинала: Thirring W., «An alternative approach to the theory of gravitation», 1961, Ann. Phys., **v. 16**, p. 96–117).

что желательно более тесно связать общую теорию относительности и лоренц-ковариантные полевые теории. Эта статья представляет собой попытку в этом направлении.

Попытки построить лоренц-ковариантную теорию гравитации предпринимались неоднократно в прошлом. Некоторые из них [1, 2] предшествовали ОТО, но они поблекли из-за блестящего успеха последней.

Первое полезное замечание в связи с этим впоследствии было сделано Фирцем [3]. Он отметил, что имеющаяся неоднозначность в построении гамильтониана релятивистского тензорного свободного поля устраняется требованием его положительности. На основе этого он получил гамильнониан и уравнения поля, которые соответствовали линейной аппроксимации теории Эйнштейна.

Следующий шаг в этом развитии был сделан Гуптой [4], который еще раз напомнил[1], что теория гравитации должна быть с необходимостью нелинейной. Причина проста: ТЭИ поля должен выступать как источник поля. Следуя этому, необходимо включить в правую часть уравнений поля ТЭИ гравитационного поля, делающего последние нелинейными[2]. Эти теории должны быть названы теориями в плоском пространстве-времени, поскольку основаны на псевдо-эвклидовой метрике. Однако, как было отмечено автором [6], псевдо-эвклидовая метрика в такой теории является ненаблюдаемой в принципе[3]. Реальные часы и измерительные линейки деформируются гравитационным потенциалом[4] таким образом, что метрика, измеренная с их помощью, соответствует риманову пространству. Фактически, метрика связанна с гравитационным полем в точности таким же образом, как и в теории относительности. Таким образом, подход, полученный из принципов лоренц-ковариантных теорий, приводит автоматически к таким же концепциям и следствиям, как и теория Эйштейна.

В этой статье мы вначале обсудим формальные стороны полевого подхода, отсылая за математическими подробностями к оригинальным работам. Далее мы рассмотрим различные аспекты трех наблюдаемых эффектов ОТО, приводя здесь для удобства читателя хорошо известные результаты. В конце статьи мы разберем относительные (сравнительные) достоинства и недостатки общепринятого и настоящего подхода.

2. Общий формализм

Системы, которыми мы будем интересоваться, состоят из частиц, электромагнитного поля и их взаимодействия с гравитационным полем. В соответствии с духом классической релятивисткой теории мы будем описывать частицы, задавая их 4-координаты z^i_α как функции собственного времени s_α, где α соответствует различным частицам. В действительности, как мы сегодня знаем, частицы более точно описываются полями, но в соответствие с ВКБ-приближением, мы используем точечное описание. Поскольку мы не будем интересоваться поляризационными

[1] Эта особенность уже появлялась в теории Нордстрема.

[2] Такого рода подход излагался также Фейнманом [5].

[3] Идея, что ренормализованная метрика соответствует метрике Эйнштейна, была предложена автору M.R. Schafroth в 1952 г. Автор также имел возможность обсудить этот подход с А. Эйнштейном. Последний выдвинул возражение, связанное с отсутствием априорных причин, по которым в этой теории гравитация должна описываться тензорным полем, а не скалярным. В. Паули также критиковал этот подход за то, что в нем не использовался как краеугольный камень принцип эквивалентности.

[4] Влияние потенциала на длины измерительных линеек было также указана Растолом [7], Дененом и др. [21].

эффектами, мы будем обсуждать распространение света, рассматривая его как поток частиц нулевой массы или используя уравнения Максвелла.

Наши формальные выкладки будут основываться на принципе действия, из которого будут получены уравнения поля и уравнения движения частиц. Эта процедура гарантурует существование сохраняющегося тензора энергии-импульса[5]. Существование тензора энергии-импульса не только требуется в полной теории, но и является необходимым для нашего второго основополагающего принципа — энергия системы без взаимодействия является положительно определенной[6]. Это избавляет от неопределенности, имеющейся в лагранжиане для свободных полей, и определяет его для скалярного, векторного и тензорного полей[7]:

$$L_s^f = \frac{1}{2}\left[\varphi_{,i}\varphi^{,i} - \mu^2\varphi^2\right],$$

$$L_v^f = -\frac{1}{4}\left(A_{i,k} - A_{k,i}\right)\left(A^{i,k} - A^{k,i}\right) - \frac{1}{2}A^i_{,i}A^k_{,k} + \frac{1}{2}\mu^2 A^i A_i, \tag{1}$$

$$L_T^f = \frac{1}{2}\left[\psi_{\mu\nu,\lambda}\psi^{\mu\nu,\lambda} - 2\psi_{\mu\nu,\lambda}\psi^{\lambda\nu,\mu} + 2\psi^{;\mu}_{\mu\nu}\psi_\sigma{}^{\sigma,\nu} - \psi^\sigma_{\sigma,\lambda}\psi^{\nu,\lambda}_\nu\right] + \frac{\mu^2}{2}\left[\psi^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} - \psi^\tau_\tau\psi^\sigma_\sigma\right].$$

Что касается интеграла действия для свободных частиц, то он определяется как обычно[8]:

$$W^p = -\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\int ds'_\alpha\, \dot z^i_\alpha \dot z^k_\alpha \eta_{ik}, \tag{2}$$

и добавляется в интеграл действия $W^f = \int d^4x L^f(x)$ для полей.

Далее мы должны изучить возможные члены взаимодействия, и тогда мы решим, как необходимо описывать гравитацию — скалярным, векторным или тензорным полем. Имея ньютоновскую теорию как предельный случай, мы предположим, что источник гравитационного поля пропорционален массе. Это предположение дает нам в трех случаях следующие возможности:

$$L'_s(x) = f\sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha\, \delta^4(x - z_\alpha)\, \dot z^i_\alpha\, \dot z^k_\alpha\, \eta_{ik}\, \varphi(x),$$

$$L'_V(x) = f\sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha\, \delta^4(x - z_\alpha)\, \dot z^i_\alpha A_i(x), \tag{3}$$

$$L'_T(x) = f\sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha\, \delta^4(x - z_\alpha)\, \dot z^i_\alpha\, \dot z^k_\alpha\, \psi_{ik}(x),$$

где f определяет силу взаимодействия и будет позднее выражена через гравитационную постоянную. Относительно этих членов мы отмечаем следующее. L'_s означает взаимодействие со следом ТЭИ частиц. Мы не можем использовать просто $L'_s = f\sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha\, \delta(x - z_\alpha)\varphi(x)$, поскольку эта сумма не имеет аналогии в случае описания частиц как полей. L'_V соответствует электродинамике с зарядом, пропорциональным массе. В теории поля не существует сохраняющегося тока с положительно определенной 0-компонентой, такая возможность присутствует только

[5] В теориях Биркгофа и Юилмаза [10] этого не делается, и Биркгоф произвольно постулирует уравнения движения.Соответственно не дается ТЭИ, который сохранялся бы на сингулярных частицах.

[6] Теория гравитации, в которой это условие не выполняется, была предложена Белинфанте и Свихартом [11]. Они доказывают, что из-за слабости взаимодействия излучение гравитонов с отрицательной энергией не приводит непосредственно к катастрофе. Мы, тем не менее, будем придерживаться этой аксиомы теории поля.

[7] См. Фирц [3]. Существует несколько форм L_T, так как мы можем сделать преобразование $\psi_{\mu\nu} \to \psi_{\mu\nu} + c\eta_{\mu\nu}\psi^\tau_\tau$.

[8] Система обозначений следующая $\varphi_{,i} = (\partial/\partial x^i)\varphi$, $\dot z^i = (d/ds)z^i$, и метрический тензор $\eta_{ik} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Тензор g_{ik} будет введен позднее, и индексы поднимаются и опускаются с помощью η, а не g.

в классическом случае. В тензорном случае мы увидим, что уравнения поля могут быть получены последовательно только для выбора (2) и без замены $\dot z^i \dot z^k$ на $\dot z^i \dot z^k + c\eta^{ik}\dot z^l \dot z_l$. Поскольку антисимметричная часть ψ не включается, мы рассматриваем ψ-поле как симметричное. Ограничимся на данный момент нашего обсуждения выражением (2), аппелируя к обычному требованию простоты, согласно которому производные и нелинейные члены должны вводиться только в случае необходимости.

Далее мы должны использовать экспериментальные факты и сравнить их с предсказаниями теорий (1), (2) и (3). Но некоторые уточнения являются безотлагательными. Так, если мы хотим получить статические ньютоновские потенциалы, а не потенциалы Юкава, то μ^2-члены в (1) должны быть опущены. Мы поступим таким образом, хотя нет доказательств против существования очень малой величины μ. Кроме того, известно, что статическое взаимодействие между частицами прекрасно описывается и скалярным и тензорным полем, но не описывается векторным. Последнее очевидно, поскольку положительная энергия требует $m_\alpha > 0$ и заряды одного знака отталкиваются друг от друга, как в случае электромагнитных сил[9]. Поскольку все опыты убеждают нас, что гравитация является притягивающей силой, то остаются два возможных кандидата. Из них в первую очередь обсудим в деталях тензорную теорию.

А. Тензорная теория.

Из (1) и (3) мы получаем для тензорного поля довольно сложные уравнения поля в виде

$$\begin{gathered}\psi_{\mu\nu,\sigma}{}^{\sigma} - \psi_{\sigma\nu,\mu}{}^{\sigma} - \psi_{\sigma\mu,\nu}{}^{\sigma} + \psi^{\sigma}_{\sigma,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\left(\psi^{\sigma\lambda}{}_{,\sigma\lambda} - \psi^{\sigma,\lambda}_{\sigma\lambda}\right) = fT^{(p)}{}_{\mu\nu};\\ T^{(p)}{}_{\mu\nu}(x) = \sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha\, \delta(x - z_\alpha)\dot z_{\mu\alpha}\dot z_{\nu\alpha}.\end{gathered} \tag{4}$$

Тензорная теория имеет несколько аналогий с векторной теорией. Во-первых, уравнения поля инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\psi_{\mu\nu} \to \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \tag{5}$$

с произвольным вектором $\Lambda_\mu(x)$. Как и в электродинамике, это может быть использовано для упрощения уравнений поля. Благодаря калибровочным преобразованиям мы можем получить

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \frac{1}{2}\,\psi^{\sigma,\nu}{}_{\sigma} \tag{6}$$

Это условие (калибровка Гильберта) выполняется, если мы ограничиваемся калибровочным преобразованием (5) с $\Box\Lambda_\mu = 0$, подобно калибровке Лоренца в электродинамике. С выбором (6) уравнения поля (4) преобразуются в

$$\Box\psi_{\mu\nu} = f\left(T^{(p)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{(p)i}{}_{i}\right). \tag{7}$$

Второе сходство с уравнениями Максвелла состоит в том, что уравнение (4) автоматически требует сохранения источника, т. е.:

$$T^{(p)}{}_{\mu\nu}{}^{,\mu} = 0. \tag{8}$$

[9]Векторная теория была рассмотрена А.Г. Лоренцем, и он был вынужден ввести отрицательную энергию.

Поскольку один $T^{(p)}$ не удовлетворяет этому условию, то мы должны прибавить еще тензор энергии-импульса ψ-поля, что автоматически порождает нелинейность. Однако сейчас мы будем обсуждать эффекты только в первых порядках по f и рассмотрим нелинейные члены позднее.

Рассматривая другую сторону проблемы, а именно, движение частиц в гравитационном поле, мы получим из принципа действия

$$\delta W = 0, \quad W = W^p + \int d^4x\, L' = \int ds\, \mathcal{L}(s), \tag{9}$$

где с учетом (2) и (3) мы получаем:

$$\mathcal{L}(s) = -(m/2)ds\, \dot{z}^i(s)\dot{z}^k(s)g_{ik}[z(s)], \tag{10}$$

$$g_{ik}(x) = \eta_{ik} - 2f\psi_{ik}(x). \tag{10a}$$

Уравнения Лагранжа $(d/ds)(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{z}^\mu) = (\partial\mathcal{L}/\partial z^\mu)$ приводят к следующим уравнениниям движения

$$(d/d\dot{s})\left\{\dot{z}^l(\eta_{lk} - 2f\psi_{lk})\right\} = -f\dot{z}^l\dot{z}^m\psi_{lm,k}. \tag{11}$$

Во-первых, мы отметим, что масса m частицы сократилась в (11) и траектория частицы не зависит от ее массы. Это следует непосредственно из факта, что $z^i(s)$ есть геодезическая линия в римановом пространстве с метрическим тензором $g_{ik}(x)$. Мы покажем ниже, что метрика имеет не только формальное значение, а действительно описывает мировые расстояния, когда они измеряются реальными часами и измерительными линейками.

Другая особенность уравнений движения (11), на которую мы хотим указать, состоит в том, что скорость $|d\overline{x}/dt|$ может быть не только меньше 1. Чтобы показать это, мы рассмотрим величину $\dot{z}^i(\partial\mathcal{L}\partial\dot{z}^i) = \mathcal{L}$, которая является постоянной, пока $\mathcal{L}$ не зависит непосредственно от s. Подходящим выбором s мы можем сделать эту константу равной 1 и получить

$$\dot{z}^i\dot{z}^k g_{ik} = 1. \tag{12}$$

Если g — диагональна (как она должна быть в нашем приложении), и если мы рассматриваем движение в одном направлении, то получаем

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \frac{g_{00}}{|g_{11}|} - \frac{1}{|g_{11}|}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \le \frac{g_{00}}{|g_{11}|} = c^2(x). \tag{13}$$

Таким образом, существует предельная скорость[10] c, но она пространственно зависима и может превосходить единицу. Однако мы увидим вскоре, что c также соответствует скорости света, и что она становится равной единице, когда измеряется реальными измерительными линейками и часами, так как они все подвержены воздействию ψ-поля.

Для того, чтобы получить численное согласие с теорией Ньютона, необходимо вычислить ψ-поля для массивной точки с массой M в начале координат. Это дает

$$T_{\mu\nu} = M\delta(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

[10] В электродинамике уравнения движения подразумевают, что $\dot{z}^i\dot{z}^k\eta_{ik} = 1$, и тот же аргумент приводит к тому, что $(dx_1/dt)^2 \le 1$. Аналогично в теории Биркгофа постулируются уравнения движения с условием $\dot{z}^i\dot{z}^k\eta_{ik} = 1$.

и мы получаем интегрированием (7)

$$\psi^{\mu\nu} = \int d^4x'\, D^{\mathrm{rot}}(x-x') f\left[T^{\mu\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} T^l_l(x)\right] = \frac{Mf}{8\pi|x|}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Отметим, что (15) автоматически удовлетворяет дополнительному условию (6). В нерелятивистском пределе, т. е. при $\dot{z}_{1,2,3} \ll 1$, $\dot{z}_0 = 1$ и для расстояний таких, что $\psi_{\mu\nu} \ll 1$, уравнение (11) становится

$$\ddot{z} = (-f/8\pi) M\, (\mathbf{z}/|\mathbf{z}|^3). \tag{16}$$

Таким образом, $f/8\pi$ должна быть равна гравитационной постоянной æ ньютоновской теории. Как уже было отмечено, знак силы предопределяется настоящим подходом, так как наш постулат о положительности E^0 требует $M > 0$.

С нашей точки зрения, наиболее важная особенность уравнений движения состоит в том, что они не инвариантны относительно калибровочной группы (5). Электромагнитные силы являются калибровочно инвариантными, тогда как для тензорного поля это не имеет места. Таким образом, наши уравнения пока что, кажется, не в состоянии описывать движение частиц, поскольку уравнения поля определяют ψ только с точностью до калибровочного преобразования, так как сила, действующая на частицы, зависит от калибровки. Поскольку c также калибровочно зависима и будет превышать 1 в некоторых калибровочных системах, то уравнение (11) даже допускает поведение, явно нарушающее причинность.

Проблема разрешается, если заметить, что W и, следовательно, уравнения движения инвариантны относительно калибровочных преобразований в совокупности с координатными преобразованиями[11]. В первом порядке по f закон преобразования получается

$$\psi_{ik} \to \psi_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}, \qquad z^i(s) \to z^i(s) + 2f\Lambda^i[z(x)]. \tag{17}$$

Лагранжиан свободного поля инвариантен относительно калибровочного преобразования[12] так же, как и $\mathcal{L}(s)$ в уравнении (9), если отбросить члены $f^2\psi\Lambda$ и $f^2\Lambda^2$. Физический смысл этого свойства инвариантности прекрасно иллюстрируется представлением, что потенциалы ψ, которые постоянны или линейны по æ, могут быть убраны (или порождены) калибровочным преобразованием. Действительно,

$$g_{ik} = \eta_{ik} + 2f(b_{ik} + a_{ikl}x^l) \tag{18}$$

с постоянными симметричными тензорами b_{ik} и a_{ikl} преобразуется в

$$\overline{g}_{ik} = \eta_{ik} = g_{ik} - 2f(\Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}) \tag{19}$$

с

$$\Lambda_i = \frac{1}{2}\left(b_{ik}x^k + \frac{1}{2}\, a_{ikl}x^k x^l\right). \tag{20}$$

Мы отмечаем, что эффект постоянной силы гравитационного поля, т. е. $b = 0$, и $a = \mathrm{const}$, компенсируется нелинейным преобразованием $\overline{z}^i = z^i + (f/4)a^i{}_{kl}z^k z^l$.

[11] Общие калибровочные преобразования были изучены Утиямой [12].

[12] Строго говоря, это инвариант с точностью до дивергенции, но это не влияет на уравнения поля.

В специальном случае, когда g_{00} зависит линейно от x_1 и, следовательно, только $a_{100} = a_{010} = a_{001} = 2g/f \neq 0$, мы имеем

$$\overline{z}_1 = z_1 + t^2 g/2.$$

Это известный результат — постоянное поле силы порождает однородное ускорение или может быть скомпенсировано последним. Не так часто упоминается простейший эффект постоянных гравитационных потенциалов (поля сил нет), т. е. когда $b_{ik} \neq 0$, $a_{ikl} = 0$. Эти потенциалы компенсируются линейным преобразованием координат. В координатах

$$\overline{z}^i = z^i - f b^i{}_k z^k, \tag{21}$$

$\mathcal{L}$ становится равной $\overline{z}^i \overline{z}^k \eta_{ik}$ и соответствует свободной частице. Это положение будет далее подчеркнуто, когда мы перейдем к рассмотрению электромагнитного поля совместно с частицами и ψ-полем. Система частица + электромагнитное поле может быть использована для построения часов и измерительных линеек. В качестве простой модели стандартного измерительного устройства мы используем атом водорода, который ведет себя подобно свободному атому в $\overline{z}$-системе. Т. е., его размер должен быть h^2/me^2 при измерениях в $|\mathbf{z}|$, и его период — $2h^3/me^4$, измеренный в $\overline{z}^0$. В z-системе он имеет другой размер и период, если мы используем его как стандартное измерительное устройство для метрики, определенной как

$$d\overline{s}^2 = d\overline{z}^i d\overline{z}^k \, \eta_{ik} = dz^i dz^k \, g_{ik}, \tag{22}$$

а не

$$ds^2 = dz^i dz^k \, \eta_{ik}.$$

Реальная метрика $d\overline{s}^2$ является калибровочным инвариантом, тогда как ds^2 — нет, и, следовательно, последняя не имеет физического смысла. Пространство-время, измеренное с помощью реальных обьектов, описывается римановой структурой, тогда как не существует измерительных линеек, которые измеряли бы исходное псевдоевклидово пространство-время. Ограничивая себя произвольно калибровкой Гильберта и налагая граничные условия $g_{ik} \to \eta_{ik}$ для $r \to \infty$, мы можем использовать наше решение (15) для обсуждения влияния ньютоновского потенциала на часы и линейки с точки зрения исходной метрики. Если мы выбираем небольшую область на расстоянии R от источника, то мы находим

$$g_{ik} = \mathrm{diag}\left[1 - \frac{2æM}{R}, -\left(1 - \frac{2æM}{R}\right), -\left(1 - \frac{2æM}{R}\right), -\left(1 - \frac{2æM}{R}\right)\right] \tag{23}$$

и

$$\overline{t} = t\,[1 - (æM/R)], \qquad \overline{x} = x\,[1 + (æM/R)]. \tag{24}$$

Т. о., действие потенциала проявляется только в изменении шкалы: линейки слегка сокращаются ($\overline{x} = 1$ соответствует $x = 1 - (æM/R) < 1$), и часы замедляются ($t = 1 + (æM/R) > 1$) при $\overline{t} = 1$. Скорость света (13) равна $1 - (2æM/R) = c$. Она меньше единицы, поскольку линейки становятся короче и ход часов — медленее. В $\overline{z}$-системе она равна единице, так как $x/t = 1 - (2æM/R)$ соответствует $\overline{x}/\overline{t} = 1$, таким образом, скорость света всегда равна единице, когда выражается в физических единицах. В этих единицах теория ведет себя совершенно причинно.

Завершая наше обсуждение ТЭИ взаимодействия, мы переходим к изучению ТЭИ поля. Вычисляя канонический ТЭИ[13] поля

$$T^{(f)}_{ik} = \left(\partial L / \partial \psi^{\alpha\beta}{}_{,i}\right) \psi_{\alpha\beta,k} - \eta_{ik} L,$$

---

[13] Детали вычислений см. Тирринг [6].

во-первых, отметим, что он калибровочно неинвариантен. Даже общий ТЭИ не является калибровочно инвариантным, поскольку L_T^f изменяется посредством (5) на дивергенцию. Таким образом, наша теория приводит автоматически к отличию от общей теории относительности, а именно, не существует общего ковариантного выражения для общего ТЭИ. Используя калибровку Гильберта и опуская члены, которые не дают вклада в общий ТЭИ, мы находим[14]

$$T_{ik}^{(f)} = \psi^{\mu\nu}{}_{,i}\psi_{\mu\nu,k} - \frac{1}{2}\psi^{\sigma}_{\sigma,i}\psi^{\tau}_{\tau,k} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\left[\psi^{\mu\nu,\lambda}\psi_{\mu\nu,\lambda} - \frac{1}{2}\psi^{\sigma,\lambda}_{\sigma}\psi^{\tau}_{\tau,\lambda}\right]. \tag{25}$$

Ясно, что если добавить к выражению (25) ТЭИ взаимодействия и ТЭИ частиц, то получится сохраняющийся общий ТЭИ. Игнорируя проблему симметризации T, мы имеем

$$T^{(p)i}{}_k + T'^i{}_k = \sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha\, m_\alpha \delta(x - z_\alpha)\dot{z}^l_\alpha(\eta_{lk} - 2f\psi_{lk})\dot{z}^i_\alpha. \tag{26}$$

Мы легко находим, что (7) и (11) предполагают всюду

$$T^i_{k,i} = 0, \qquad T_{ik} = T^{(f)}_{ik} + T^{(p)}_{ik} + T'_{ik}. \tag{27}$$

Для нашего статического решения (15), обобщенного на несколько частиц, легко проверить, что энергия, полученная из (27), соответствует решению ньютоновской теории. Для

$$\psi_{\mu\nu} = \sum_\alpha \frac{m_\alpha f}{8\pi|z - z_\alpha|}\,\delta_{\mu\nu} \tag{28}$$

мы находим положительную энергию поля:

$$P^{(f)}_0 = \int d^3x\, T^{(f)}_{00} = \frac{æ}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{m_\alpha m_\beta}{|z_\alpha - z_\beta|}\right). \tag{29}$$

Рассматривая энергию частиц и взаимодействия, важно использовать ренормализованную скорость света. Из (12) мы находим (всюду опуская члены с f^2 и используя диагональность ψ_S из-за квази-статического приближения)

$$\dot{z}^0 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}(1 + f\psi^0_0); \quad c = \frac{1 - f\psi^0_0}{1 - f\psi^1_1}; \quad v = \left|\frac{d\mathbf{z}}{dz^0}\right| \tag{30}$$

и, таким образом, получаем

$$P^{(p)}_0 + P'_0 = \int d^3x\,(T^{(p)}_{00} + T'_{00}) = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}[1 - f\psi^0_0(z_\alpha)]. \tag{31}$$

Первый член соответствует энергии частиц, вычисленной через ренормализованную скорость света. Энергия взаимодействия, соответствующая притяжению, является отрицательной и компенсируется положительной энергией поля. Действительно, используя статическое решение (28) и соответствующее нерелятивистское выражение, мы приходим к известной форме выражения

$$P_0 = P^{(f)}_0 + P^{(p)}_0 + P'_0 = \sum_\alpha m_\alpha\left(1 + \frac{v^2_\alpha}{2c^2}\right) - \frac{æ}{2}\sum_{\alpha\beta}\frac{m_\alpha m_\beta}{|z_\alpha - z_\beta|}\,. \tag{32}$$

[14] Это дает положительно определенную энергию, если выполняется (6) и $\psi^\sigma_\sigma = 0$, как следует из уравнений Эйлера для L_T^f при μ, не равном 0. Для $\mu = 0$ $\int T_{00}$ положителен только в калибровке Гильберта с $\psi^\sigma_\sigma = 0$. В случае нулевой массы калибровочная инвариантность может быть использована как руководящий принцип для построения L^f.

Теперь нас будет больше интерисовать взаимодействие ψ-поля с другим полем, а не с классической частицей. L' тогда будет получена заменой в (3) L' ТЭИ частиц на ТЭИ поля. Для электромагнитного поля, например, это дает

$$L'_{el} = \int \psi^{\mu\nu} T^{(el)}{}_{\mu\nu},$$
$$T^{(el)}{}_{\mu\nu} = (A_{\mu,\rho} - A_{\rho,\mu})(A_{\nu}{}^{,\rho} - A^{\rho}{}_{,\nu}) - {}^{1}\!/_{4}\eta_{\mu\nu}(A_{\lambda,\sigma} - A_{\sigma,\lambda})(A^{\lambda,\sigma} - A^{\sigma,\lambda}); \tag{33}$$

последнее получается добавлением в лагранжиан свободного поля ${}^{1}\!/_{4}(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu})(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu})$. Если присутствуют также и заряженные частицы, то общий лагранжиан для электромагнитного поля должен быть записан в первом порядке по f следующим образом:

$$L_{(el)} = (1 - f\psi^{\tau}_{\tau})(\eta^{\mu\nu} + 2f\psi^{\mu\nu})(\eta^{\rho\sigma} + 2f\psi^{\rho\sigma})\times$$
$$\times 1/4(A_{\mu,\rho} - A_{\rho,\mu})(A_{\nu,\sigma} - A^{\sigma,\nu}) + A_{\mu}(x)\sum_{\alpha} e_{\alpha}\int ds^{\alpha}\dot{z}^{\mu}_{\alpha}(s^{\alpha})\delta(x - z_{\alpha}). \tag{34}$$

Результирующие уравнения поля есть

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(1 - f\psi^{\tau}_{\tau})(\eta^{\mu\nu} + 2f\psi^{\mu\nu})(\eta^{\rho\sigma} + 2f\psi^{\rho\sigma})(A_{\mu,\rho} - A_{\rho,\mu}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\int ds^{\alpha}\,\dot{z}^{\nu}_{\alpha}(s^{\alpha})\delta(x - z_{\alpha}). \tag{35}$$

Для диагонального тензора ψ эти уравнения поля идентичны уравнению Максвелла с диэлектрической постоянной ε и магнитной проницаемостью μ[15]. Для решения (15), например, мы имеем:

$$\varepsilon = \mu = \frac{1}{1 - (2M\text{æ}/|\mathbf{z}|)}. \tag{36}$$

Соответственно, мы имеем следующую локальную скорость света

$$c = \sqrt{\varepsilon^{-1}\mu^{-1}} = 1 - (2M\text{æ}/|\mathbf{z}|) \tag{37}$$

в согласии с ограничением скорости (13) для материальных тел. Относительно калибровочной группы мы находим, что интеграл действия $\int d^4xL$ является инвариантом, когда мы к (5) добавляем координатные преобразования и линейные преобразования векторного потенциала:

$$\psi^{ik} \to \overline{\psi}^{ik} = \psi^{ik} + \Lambda^{i,k} + \Lambda^{k,i},$$
$$z^{i} \to \overline{z}^{i} = z^{i} + 2f\Lambda^{i}(z),$$
$$x^{i} \to \overline{x}^{i} = x^{i} + 2f\Lambda^{i}(x),$$
$$A^{i}(x) \to \overline{A}^{i}(\overline{x}) = A^{i}(x) + 2f\Lambda^{k}\Lambda^{i}_{,k}(x). \tag{38}$$

В первом порядке по f мы проверяем $\int d^4xL[A(x)] = \int d^4\overline{x}L[\overline{A}(\overline{x})]$, принимая, что $1 - 2f\Lambda^{i}_{,i} = |\partial x/\partial\overline{x}|$.

B. Скалярная теория.

Выполняя подобные выкладки для скалярной теории, мы встречаем следующие особенности.

(1) Теория дает уравнения движения, не зависящие от массы частицы, которые в нерелятивистском случае идентичны уравнениям ньютоновской теории.

[15] См., например, [13].

(2) Траектории являются геодезическими в конформном пространстве Римана с метрикой $g_{ik} = \eta_{ik}(1 - 2f\varphi)$.

(3) Из уравнений движения следует:

$$\dot{z}^k \dot{z}_k (1 - 2f\varphi) = 1,$$

так что предельная скорость повсюду равна единице[16].

(4) Калибровочной группой является (с условиями, что c, $a_i = const$, $f^2 \to 0$):

$$\varphi \to \varphi + c + a_k x^k, \qquad z^i \to z^i(1 + fc) + \frac{f}{2} z^k z^l ({\delta_l}^i a_k + {\delta_k}^i a_l - y_{lk} a^i),$$

которая подтверждает интерпретацию $\eta_{ik}(1 - 2f\varphi)$ как наблюдаемой метрики. Калибровочная группа допускает нелинейное преобразование z, и, следовательно, выполняется общий принцип эквивалентности.

(5) Теория не требует автоматически сохранения источника гравитационного поля[17].

(6) Существует тензор энергии-импульса, сохраняющийся всюду:

$$T^{ik}(x) = \varphi^{,i}\varphi^{,k} - \frac{\eta^{ik}}{2}\varphi^{,l}\varphi_{,l} + \sum_\alpha m_\alpha \int ds_\alpha \, \dot{z}^i_\alpha \dot{z}^k_\alpha (1 - 2f\varphi)\delta(x - z_\alpha).$$

Общая энергия соответствует в нерелятивистском пределе ньютоновской энергии.

(7) Поскольку ${T^{(el)i}}_i = 0$, то не существует взаимодействия с электромагнитным полем.

Таким образом, мы можем видеть, что скалярная теория является полностью последовательной и не существует теоретических возражений против нее, но она опровергается эмпирическими основаниями (главным образом из-за (7)).

C. Заключение.

Суммируя, мы можем заключить, что теория взаимодействия безмассового тензорного поля полностью аналогична с классической электродинамике, за исключением одного важного момента. Теория является инвариантной относительно калибровочных преобразований, только когда они комбинируются с преобразованиями координат и электромагнитных потенциалов. Это имеет замечательным следствием то, что псевдоэвклидовая метрика преобразуется взаимодействием в риманову метрику. Этого нет в электродинамике, но имеет место и в скалярной теории. Используя теоретико-полевой жаргон, мы назовем исходную метрику с z-координатами неренормализованной картиной, а риманову метрику с $\overline{z}$-координатами — ренормализованной. Без сомнения, именно последняя картина имеет большее физическое значение, поскольку в ней все расстояния измеряются реальными линейками. Расстояния в неренормализованной картине не соотносятся прямо к реальным измерениям, но при использовании калибровки Гильберта с граничными условиями $g \to \eta$ для $r \to \infty$ они становятся определяемыми. В этом случае эта картина имеет преимущества, так как она ближе соотносится с концепцией ньютоновской теории, и мы далее обсудим важные эффекты с этих двух точек зрения. Конечно, эти картины должны рассматриваться только отдельно, так как, когда оба языка используются одновременно, появляется путаница.

---

[16] В этом случае мы можем ввести параметр s' так, что $(dz^i/ds')(dz_i/ds') = 1$. См. Бергманн [14].

[17] Хотя уравнения поля этого и не требуют, все же нелинейности вводятся в теории Нордстрема, где утверждается, что ψ-поле должно вносить вклад в плотность массы.

3. Линейные эффекты

Первый эффект, который мы обсудим в деталях, — это красное смещение. В неренормализованной картине оно возникает потому, что движение атомов замедляется по мере усиления гравитационного потенциала. Мы можем задать вопрос — как это соотносится с принципом Маха, согласно которому масса частицы должна увеличиваться при приближении к другим массам. Но увеличение массы означает увеличение, а не уменьшение частоты. Мы увидим, что этот эффект фактически имеет место, но перекомпенсируется тем, что гравитационный потенциал действует подобно диэлектрику. Результирующее уменьшение заряда уменьшает частоты. В ренормализованной картине заряд и масса имеют свои нормальные значения. В ней красное смещение может быть интерпретировано как уменьшение частоты или энергии фотона при его удалении от тяготеющего тела. Количественное согласие достигается, если ренормализованная скорость света используется во втором случае последовательно. Для иллюстрации нашего общего обсуждения мы рассмотрим частный пример — атом водорода в постоянном гравитационном потенциале, который задается уравнением (23). Таким образом, мы пренебрегаем гравитационным эффектом Штарка, который, действительно, очень мал. Кроме того, в этом случае нет различия между свободно падающим протоном и протоном покоящимся[18]. Протон (покоящийся) генерирует свое кулоновкое поле в соответствии со статической нулевой компонентой (35):

$$(1 - f\psi^\tau_\tau)(1 + 2f\psi^0_0)(\eta^{\mu\sigma} + 2f\psi^{\mu\sigma})A_{\mu\sigma} = c\delta(x)\int ds\,\dot{z}^0\delta(t - z^0) \tag{39}$$

или с $\gamma = 2M\text{æ}/R$, при подстановке (23):

$$-\nabla A_0(1+\gamma) = c\delta(\mathbf{x}). \tag{40}$$

Это уравнение имеет очевидное решение

$$A_0 = (e/4\pi r)(1-\gamma) = (e/4\pi\varepsilon r), \qquad r = |\mathbf{x}| \tag{41}$$

где ε дается уравнением (36). Уравнение движения электрона

$$m\ddot{z}^r g_{rs} = e\dot{z}^0 A_{0,s} \tag{42}$$

в нерелятивистском случае принимает вид:

$$m(d^2/dt^2)\mathbf{z}(1+2\gamma) = (e^2/4\pi)(\mathbf{z}/|\mathbf{z}|^3)(1-\gamma/2). \tag{43}$$

В неренормализоранной картине влияние гравитационного потенциала удобнее всего выражается с помощью введения эффективного заряда и массы:

$$m_{\text{eff}} = m(1 + \frac{3}{2}\gamma), \quad e^2_{\text{eff}} = \frac{e^2}{\varepsilon} = e^2(1-\gamma). \tag{44}$$

В этих обозначениях уравнения движения принимают свою стандартную форму

$$m_{\text{eff}}(d^2/dt^2)\mathbf{z} = (e^2_{\text{eff}}/4\pi)(\mathbf{z}/r^3). \tag{45}$$

Действительно, $m_{\text{eff}} > m$, в согласии с принципом Маха[19]. Так как эффективная масса зависит только от потенциала, а не от его производных, то она не имеет

[18]Так как сейчас лучшими измерениями красного смещение являются наземные; нас будет интересовать последний случай.

[19]Эйнштейн интерпретирует соответствующий член уравнений движения частиц в гравитационном поле с точки зрения принципа Маха. Более детальное обсуждение этого уравнения дано в [21]. В скалярной теории $e_{\text{eff}} = e, m_{\text{eff}} = m(1 - f\varphi) < m$.

анизотропии, как это иногда предполагалось. Для того, чтобы определить размер и частоту основного состояния атома водорода, мы используем квантовую теорию. Применяя ее в ее обычной форме (т. е. постулируя правило коммутации $[x, p] = ih$) мы получаем известное выражение для радиуса

$$r_b = \frac{h^2}{m_{\text{eff}}(e_{\text{eff}}^2/4\pi)} = \frac{h^2}{me^2/4\pi}(1-\gamma/2) \tag{46}$$

и для частоты[20]

$$\omega = (1/2h)m_{\text{eff}}(e_{\text{eff}}^2/4\pi h)^2 = (1/2h)m(e^2/4\pi h)^2(1-\gamma/2). \tag{47}$$

В согласии с нашими общими выводами мы теперь явно видим, как атомы сжимаются и их частоты уменьшаются.

В ренормализованной картине, где реальные обьекты, состоящие из атомов, используются как стандартные меры, мы вводим $\overline{r} = r(1+\gamma/2)$, $\overline{t} = t(1-\gamma/2)$. В этих координатах уравнение движения принимает вид

$$m(d^2/d\overline{t}^2)\mathbf{z} = e^2\mathbf{z}/4\pi\overline{r}^3), \tag{48}$$

радиус и частота принимают свои нормальные значения:

$$\overline{r}_b = h^2/m(e^2/4\pi), \qquad \overline{\omega} = (1/2h)m(e^2/4\varphi)^2. \tag{49}$$

То, что эффект постоянного гравитационного потенциала может быть выражен либо как изменение e и m, либо как изменение длины и времени, можно непосредственно увидеть из принципа действия, соответствующая часть которого может быть записана (в нерелятивистском случае) в следующим образом:

$$W = \int dt\,(1-\gamma/2)\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{z}}{dt}\right)^2(1+2\gamma) - \frac{e^2}{4\pi r}(1-\gamma/2)\right]$$

или

$$W = \int dt\,\left[\frac{m_{\text{eff}}}{2}\left(\frac{d\mathbf{z}}{dt}\right)^2 - \frac{e_{\text{eff}}^2}{4\pi r}\right] = \int d\overline{t}\,\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{z}}{dt}\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\overline{r}}\right]. \tag{50}$$

Следующий вопрос, касающийся красного смещения, — как свет распространяется в гравитационном поле специального вида (23). Поскольку ψ не зависят от t, то очевидно, что решения уравнений Максвелла должны быть $\sim \exp(-i\omega t)$ и, таким образом, в неренормализованной картине частота более не изменяется. В более общем случае, в геометрической оптике мы имеем $A \sim \exp(iS/h)$, где

$$S(x) = \int^x ds\,\dot{z}^i(s)\dot{z}^k(s)g_{ik}, \tag{51}$$

и интеграл вычисляется по нулевым геодезическим. Компоненты тензора g теперь рассматриваются как функции пространства, но они не должны сильно изменяться на масштабе длины волны, так что $z^i(s)$ можно аппроксимировать как $s\dot{z}^i$, и мы получаем (для $m = h = 1$):

$$S(x) = x^i\dot{z}^k g_{ik} = x^i k_i; \quad k_i = \dot{z}^j g_{ij}. \tag{52}$$

[20] Модели часов, не связанные с квантовой механникой, были предложены Меллером [15]. Однако, там используется скорее некая феноменологическая сила, а не электромагнитная; исследуется, как на такую силу влияет гравитационный потенциал. Квантово-теоретические вычисления представлены Мошинским [16] и Папапетру [17]. Если мы хотим избежать использования квантовой теории, то мы можем использовать классический радиус электрона как стандартную длину. Он изменяется на тот же фактор, что и радиус Бора, поскольку $\alpha = i^i/hl$ — есть инвариант.

Отсюда мы видим, что частота связана с геодезической:

$$\omega = k_0 = \dot{z}^j g_{0j} = (1-\gamma)\dot{z}^0, \quad \gamma = 2M\text{æ}/r. \tag{53}$$

Из уравнений движения (11) действительно следует, что $(d/ds)(1-\gamma)\dot{z}^0 = 0$.

В ренормализованной картине частота изменяется, поскольку она измеряется в единицах локального времени. Определяя ренормализованную частоту и волновое число как

$$S = \bar{x}^i \bar{k}_i, \tag{54}$$

мы получаем частоту в виде:

$$\bar{\omega} = (1-\gamma/2)\dot{z}^0. \tag{55}$$

Эта величина изменяется так, что красное смещение в ренормализованной картине имеет то же численное значение, что и в уравнении (47):

$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = \frac{1+\gamma_1/2}{1+\gamma_2/2}. \tag{56}$$

В (47) красное смещение возникает по другой причине, но так как последнее относится к другой картине, эти два эффекта не должны складываться.

Мы завершим обсуждение красного смещения в ренормализованной картине рассмотрением фотона как ультрарелятивистской частицы. Воспользуемся элементарным аргументом — фотон теряет свою потенциальную энергию, которая определяется как

$$V = -(M\text{æ}/r)h\bar{\omega}. \tag{57}$$

Здесь мы показываем, что элементарное сохранение энергии имеет место для ренормализованной энергии, даваемой соотношением

$$\bar{E} = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\bar{v}^2}, \quad \bar{v} = d\bar{r}/dt, \quad v = dr/dt. \tag{58}$$

Эта величина связана с ренормализованной частотой (55) соотношением $\bar{E} = h\bar{\omega}$. Из вариационных уравнений мы знаем, что для радиального движения

$$\dot{r}^2(1-\gamma) - \dot{r}^2(1+\gamma) = 1, \quad (1-\gamma) = E_\infty = (1-v_\infty^2)^{-1/2}.$$

Из этого мы находим

$$1 - v^2[(1+\gamma)/(1-\gamma)] = 1 - v^2/c^2 = 1 - \bar{v}^2 = (1-v_\infty^2)(1-\gamma)$$

и, следовательно[21],

$$\bar{E} = E_\infty + \frac{\gamma}{2}\bar{E} = E_\infty - V = (1 - \frac{\gamma}{2}). \tag{59}$$

Первая часть (59) соответствует элементарному закону сохранения энергии, если величина $-\gamma/2\bar{E} = -(Mx/r)\bar{E}$ определяется как потенциальная энергия, а $\bar{E}$, соответственно, как общая масса (энергия). Эта формула выполняется независимо от скорости и применима также и к фотонам, если они рассматриваются как частицы с условием $v_\infty \to 1$.

Красное смещение вскоре станет наиболее точно измеримым эффектом ОТО, но, к сожалению, оно является наименее чувствительным эффектом. Как известно,

[21] Это релятивистское обобщение уравнения (32).

оно следует непосредственно из принципа эквивалентности. Рассматривая вращающиеся или равномерно ускоренные системы, мы получаем поперечный или продольный, соответственно, эффект Доплера. Он зависит только в первом порядке от g_{00} и, следовательно, получается как в простой тензорной теории с $\Box\psi_{\mu\nu} = fT_{\mu\nu}$, так и в скалярной теории.

Переходя к отклонению лучей света, мы видим, что в неренормализованной картине оно является следствием локальной зависимости скорости света от координат. Из показателя преломления (27) мы, применяя принцип Ферма, находим:

$$\delta\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \frac{\partial\mu}{\partial x^3} = 2M\text{æ} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(x^2+\Delta^2)^{-3/2} = 4M\text{æ}/\Delta, \tag{60}$$

где Δ — прицельное расстояние. Так как фотон замедляется около источника, то знак $\delta\varphi$ такой, что фотон как бы пытается держаться дальше (tries to stay away) от Солнца. В ренормализованной картине скорость света всегда равна 1, но пространство риманово, и фотон распространяется вдоль геодезических. Рассматривая фотон как частицу, мы записываем принцип действия в полярных координатах:

$$W = \int ds\ [t^2 g_{00} - (\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)g_{rr}]. \tag{61}$$

Получающиеся уравнения Эйлера интегрируются обычным образом:

$$\dot t^2 g_{00} - (\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)g_{rr} = 1, \quad \dot t g_{00} = E, \quad \dot\varphi r^2 g_{rr} = L. \tag{62}$$

Ассимптотическая энергия $E = 1/\sqrt{1-v_\infty^2}$ и угловой момент L связаны с прицельным расстоянием:

$$L/E = \Delta v_\infty \tag{63}$$

Исключая s и t из (62), мы находим обычным способом:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r}\frac{1}{\sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{00}}\frac{E^2-g_{00}}{L^2}r^2 - 1}}, \tag{64}$$

для $v_\infty \to 1, E \gg g_{00}$ мы получаем, используя (63), элементарным интегрированием

$$\delta\varphi = \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{}} - \pi = \frac{4m\text{æ}}{\Delta} \tag{64a}$$

в согласии с (60). Если $g_{rr} = 1$, как в случае с $\Box\psi_{\mu\nu} = fT_{\mu\nu}$, мы получаем половину этой величины[22]. В скалярной теории $g_{00} = g_{rr}$, и отклонение ультрарелятивистских частиц отсутствует. Это связано с тем, что в скалярной теории, так же, как и в электродинамике, взаимодействие ослабевает с увеличением энергии[23]. Напротив, гравитационное взаимодействие становится сильнее для частиц с высокими энергиями.

4. Нелинейные эффекты

Развитая до сих пор теория является удовлетворительной только в первом порядке. Причина этого в том, что, прежде всего, уравнение (2) является противоречивым, так как для ТЭИ только частиц не выполняется закон сохранения. Во-вторых, L' калибровочно инвариантен, только если члены $\sim f^2$ отбрасываются. Для

[22] $2m\text{æ}/\Delta$ обычно называется классической величиной, так как она получается уже в ньютоновской теории, если скорость на гиперболической траектории устремить к c. Однако, полагая в нерелятивистском вычислении скорость равную c, мы не можем получить физических результатов.

[23] Так и в электродинамике частица со скоростью $\to 1$ не испытывает отклонения в кулоновском поле.

того, чтобы разрешить первое противоречие, мы должны каким-нибудь способом добавить ТЭИ поля к ТЭИ частиц. Здесь мы встречаем трудность в том, что локализованную энергию и момент невозможно определить однозначно, так как они изменяются добавлением дивергенции в лагранжиан. Таким образом, мы должны вернуться к калибровочной инвариантности, приводящей нас к однозначному выбору уравнений. Калибровочная инвариантность L' достигается, если мы обобщим закон преобразования ψ аналогично закону преобразования электромагнитного потенциала

$$\begin{gathered}\dot{z}^i \to \dot{\bar{z}}^i = \dot{z}^i + 2f\dot{z}^k\Lambda^i_{,k},\\ \psi_{ik}(x) \to \bar{\psi}_{ik}(\bar{x}) = \psi_{ik}(x) + \Lambda_{k,i} + \Lambda_{i,k} - 2f\psi_{km}\Lambda^m_{,i} - 2f\psi_{il}\Lambda^l_{,k}.\end{gathered} \tag{65}$$

Для инфинитезимальных Λ это приводит к инвариантности L'; однако, чтобы сделать L инвариантным относительно (65), необходимо в L^0 добавить новые члены. Общепринятая теория поля не дает нам никаких указаний на то, как мы должны построить L, из которого последовательно можно получить калибровочно инвариантные уравнения. Таким образом, положение было бы действительно серьезным, если бы Эйнштейн не решил нам эту задачу. Решение находится, если заметить, что (65) являются не чем иным, как законом преобразования контравариантного вектора и контравариантного тензора $g_{ik} = \eta_{ik} - 2f\psi_{ik}$ при произвольных инфинитезимальных преобразованиях координат. Это относит нашу проблему к тщательно разработанной математической дисциплине, и мы можем решить проблему полностью, а не только в разложении по x. Зная ответ из эйнштейновских общековариантных уравнений, мы должны записать их в форме, соответствующей нашему предыдущему рассмотрению.

Прежде, чем перейти к дальнейшему рассмотрению теории, мы обсудим, где искать экспериментальные доказательства для этих поправок более высоких порядков. Оказывается, что только смещение перигелия планетных орбит чувствительно к нелинейностям теории.

Чтобы учесть существенные члены, мы воспользуемся уравнением (64), которое запишем с новой переменной интегрирования $\rho = 1/r$:

$$\varphi = \int d\rho\ \{(g + rr/g_{00})[(E^2 - g_{00})/L^2] - \rho^2\}^{-1/2}. \tag{66}$$

Разлагая выражение под квадратным корнем, мы можем ограничется вторым порядком по ρ:

$$(g_{rr}/g_{00})\,[(E^2 - g_{00})/L^2] - \rho^2 = A_0 + \rho A_1 + \rho^2 A_2\ ,$$

и смещение перигелия получается

$$\delta\varphi = \int d\rho[\,]^{-1/2} - 2\pi = 2\pi(A_2^{-1/2} - 1). \tag{67}$$

Орбита Меркурия является практически круговой (радиус a) и нерелятивистской, так что мы можем положить, что

$$E = 1, \qquad L^2 = M\text{æ}a. \tag{68}$$

Следовательно, $E^2 - g_{00}$ стала величиной первого порядка по ρ, так что член второго порядка необходим только для g_{00}. Из размерных соображений он должен быть $\sim (M\text{æ})^2\rho^2$ и, если мы берем член первого порядка согласно (23), то имеем

$$g_{00} = -2M\rho + c\,(M\rho)^2, \qquad g_{rr} = 1 + 2M\rho. \tag{69}$$

c — константа, которая вычисляется из нелинейных уравнений и равна 2. Для $\delta\rho$ мы находим

$$\delta\rho = (8 - c)\,\pi M æ/a. \tag{70}$$

Игнорируя члены второго порядка, мы получаем фактор 8 вместо 6 перед $\pi M æ/a$.

Вводя нелинейные обобщения (4), (6) и (7), мы запишем эти уравнения как

$$\Box\tilde{\mathsf{g}}^{ik} = 16\pi æ T^{(p)ik}(x), \qquad \tilde{\mathsf{g}}^{ik}{}_{,i} = 0 \tag{71}$$

с

$$\tilde{\mathsf{g}}^{ik} = \eta^{ik} + 2f\varphi^{ik}, \qquad \varphi^{ik} = \psi^{ik} - 1/2\eta^{ik}\psi^{\tau}_{\tau}. \tag{72}$$

С точностью до порядка f $\tilde{g}^{ik}$ может быть построен из g^{ik} (10), если взять обратную матрицу и умножить ее на квадратный корень из детерминанта[24]

$$\tilde{g}^{ik} g_{ik} = \delta^i_l, \qquad \tilde{g}^{ik}\sqrt{-|g_{nm}|} = \mathsf{g}^{ik} \tag{73}$$

Теперь оказывается, что последовательные нелинейные уравнения получаются добавлением в $T^{(p)}$ ТЭИ поля, в свою очередь полученного из нашего лагранжиана (1). Последний состоит из канонического ТЭИ, который мы уже вычисляли, и части, соответствующей тензорному характеру поля («спиновая часть»):

$$\begin{aligned} T^{jk} &= T^{(p)jk} + T^{(f)jk} + T^{(s)jk} \\ T^{(s)jk} &= -F^{jik}{}_{,i} - F^{kij}{}_{,i} - F^{ikj}{}_{,i}, \\ F^{jik} &= (\delta L^{(f)}/\delta\varphi^{\alpha\beta}{}_{,j})(\varphi^k_\alpha\eta^i_\beta - \varphi^i_\alpha\eta^k_\beta). \end{aligned} \tag{74}$$

Для спиновой части отдельно выполняется закон сохранения, не влияя при этом на закон сохранения общей энергии, но эта часть дает существенный вклад в общую плотность энергии. Полные уравнения есть

$$\Box\mathsf{g}^{ik} = 16\pi æ T^{ik}, \tag{75}$$

$$\mathsf{g}^{ik}{}_{,i} = 0, \tag{76}$$

где g^{ik} связаны с g_{ik} соотношениями (73). Эти уравнения могут быть также получены из лагранжиана, который, однако, не равен $L^f_T + T^{ik}g_{ik}$. Мы обсудим в следующем разделе, как уравнение (76) связано с уравнениями Эйнштейна. Для того, чтобы определить квадратичный член в g_{ik}, мы подставим в (75) энергию, полученную в первом порядке по ψ. Для этого нам надо переписать L^f из (1) в терминах φ. Проделав это, мы находим из (74)

$$F^{jik} = \left(\varphi^{\alpha\beta,j} - \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\varphi^{\tau,j}_{\tau} - \varphi^{j\alpha,\beta} - \varphi^{j\beta,\alpha}\right)(\varphi^k_\alpha\eta^i_\beta - \varphi^i_\alpha\eta^k_\beta). \tag{77}$$

Подставляя решение (14) для φ

$$\varphi = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(x) = \frac{fM}{4\pi|\mathbf{x}|}, \tag{78}$$

находим спиновую часть T^{ik}:

$$T^{(s)ik} = 2\delta_{j0}\delta_{k0}(\varphi\varphi^{,i})_{,i}. \tag{79}$$

[24] По нашему соглашению о поднятии индексов мы должны использовать для обратной матрицы символ, отличный от g^{ik}.

Дифференцирование дает два вклада: один $\sim \varphi\Delta\varphi$ и второй $\sim (\nabla\varphi)^2$. Первый вклад является бесконечно большим для точечной массы, но для распределенной массы плотности ρ он $\sim \rho(x)\varphi$. Вне источника это дает $\varphi \sim 1/r$ и, следовательно, необходимо только ренормализовать массу. Вводя эти члены в определение M, в первом приближении, мы получаем только из второго слагаемого вклад $\sim 1/r^2$. Обозначая его как $g^{(s)}$, мы находим

$$\Box \mathsf{g}^{(s)ik} = -16æ^2 \frac{M^2}{r^4}\delta_i^0\delta_k^0, \quad \mathsf{g}^{(s)ik} = \frac{8æ^2M^2}{r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Канонический ТЭИ (5) получается вида

$$T^{(f)ik} = \frac{1}{2}\varphi^{,i}\varphi^{,k} - \frac{\eta^{ik}}{4}\varphi^{,\lambda}\varphi_{,\lambda} = \frac{x}{4\pi}\left(\frac{x^ix^k}{r^6} - \frac{\eta^{ik}}{2}\frac{x^lx_l}{r^6}\right)M^2, \quad x^0 = 0. \tag{81}$$

Подставляя это в (75), мы получаем некоторый недиагональный вклад в g^{ik} и, следовательно, в g_{ik}. Эти вклады должны быть устранены калибровочными преобразованиями, поскольку в наших вычислениях использовался диагональный g_{ik}. Зная, что

$$\mathsf{g}^{(f)ik} = \tilde{\mathsf{g}}^{(f)ik} + 2\Lambda^{,ik} - \eta^{ik}\Lambda^{,j}_{,j}; \quad \Box\Lambda = æ^2M^2/4r^2, \tag{82}$$

мы вычисляем

$$\Box\tilde{g}^{(f)ik} = \frac{æ^2M^2}{2r^4}\,\mathrm{diag}(3,-1,-1,-1), \quad \tilde{g}^{(f)ik} = \frac{æ^2M^2}{4r^2}\,\mathrm{diag}(-3,1,1,1). \tag{83}$$

Добавляя $g^{(s)ik}$ и $g^{(f)ik}$ в первый порядок $T^{(p)ik}$, мы находим

$$\mathsf{g}^{ik} = \mathrm{diag}\left[1 + \frac{4Mæ}{r} + \left(8 - \frac{3}{4}\right)\frac{M^2æ^2}{r^2}; -1 + \frac{M^2æ^2}{4r^2}; -1 + \frac{M^2æ^2}{4r^2}; -1 + \frac{M^2æ^2}{4r^2};\right], \tag{84}$$

и через (73) получаем

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - (2Mæ/r) + (2M^2æ^2/r^2), \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} &= -1 - (Mæ/r) - 3/2(M^2æ^2/r^2). \end{aligned} \tag{85}$$

Этот результат согласуется с разложением метрики Шварцшильда по соответствующим координатам и с нашими вычислениями смещения перигелия. Интересно отметить, что наибольший вклад в (83) дает спиновая часть T^{ik}. Любой простой подход (например, (19)), просто использующий ньютоновскую энергию как источник для g_{ik}, приведет к неправильным коэффициентам.

5. Обсуждение

Разберем теперь связь между нашим подходом и подходом Эйнштейна. L_T^f в (1) есть разложение до членов второго порядка включительно той части плотности кривизны $\sqrt{-g}R$, которая содержит только первые производные. $L^p + L_T'$ являются в этом приближении плотностью $\int ds\,\delta(x - z(s))\dot{z}^i\dot{z}^k g_{ik}$. Аналогично, лагранжиан электромагнитного поля (34) равен $\sqrt{-g}F^{ik}F_{ik}$. Все вместе эти скалярные плотности мы рассматриваем на языке ОТО как лагранжианы. Соответственно, равенство (4) является разложением $R_{ik} - 1/2g_{ik}R = æ^2T_{ik}$ до наименьшего порядка в f.

ТЭИ (25) является эйнштейновским псевдотензором t_{ik} и $T^{(p)} + T'$ в (26) — это плотность энергии-импульса $T^i_k = t^{il} g_{lk}$ с $T^{il} = m \int ds\, \delta(x - z)\dot{z}^i \dot{z}^l$. Таким образом, уравнения (27) выражают хорошо известное соотношение $(T^i_k + t^i_k)_{,i} = 0 = t^i_{k;i}$. Наши правила для преобразования различных величин при калибровочных преобразованиях являются в точности законами преобразования векторов и тензоров при общековариантных преобразованиях. Калибровка Гильберта (76) определяет специальный класс координатных систем, называемых гармоническими координатами. На использовании последних особенно настаивал Фок [20]. В этих координатах уравнения Эйнштейна действительно могут быть записаны в форме (71) как было продемонстрировано Гуптой [18]. В аргументах, используемых этими двумя подходами, существует много общего. В обоих случаях мы обращаемся к экспериментальным данным или к довольно туманному критерию простоты, чтобы исключить уравнения с высшими производными, нелинейностями высоких порядков или с космологическим членом, который соответствует μ^2-члену в (1). Действительно, наш опыт из квантовой электродинамики предполагает, что поляризация вакуума введет члены в лагранжиан $\sim \sqrt{-g}R$, которые допускаются обеими точками зрения. Только из имперических соображений мы можем сказать, что эти члены должны иметь малые коэффициенты.

В одном отношении существует различие. Из требования положительно определенной энергии теоретико-полевой подход способен предсказать знак гравитационной силы. Однако, мы должны помнить, что общая энергия не является калибровочно инвариантной и положительна только в специальной калибровке. В этой калибровке теория является прямым релятивистским обобщением ньютоновской теории и только в ней мы можем утверждать, что знак силы предсказывается. Резюмируя, мы сопоставим достоинства и недостатки эйнштейновского и представленного (теоретико-полевого) подходов.

Теоретико-полевой подход.

за:

1) Эта теория следует моделям хорошо известных теорий поля, в частности, электродинамике.

2) Она предсказывает, что в нерелятивистском случае гравитация является притягивающей силой.

3) Она автоматически приводит к римановой структуре пространства-времени и посредством этого определяет стандартные часы и линейки.

против:

1) Полевая теория не дает нам никаких указаний на то, как построить нелинейные калибровочно инвариантные уравнения. Для этого она использует риманову геометрию. Только в общековариантном формализме уравнения принимают компактную и полную форму.

2) Предполагается, что в первом приближении пространство-время является пространством-временем Минковского и что неэвклидовы отклонения малы. Если гравитационные силы являются силами, которые определяют структуру пространства в большим масштабах, то этот подход не пригоден для решения космологических проблем.

Эйнштейновский подход.

за:

1) Нелинейные уравнения следуют непосредственно из принятия Римановой геометрии.

2) Он не аппелирует к другим полевым теориям, но выводит все из двух принципов — эквивалентности и общековариантности.

против:

1) Он не убеждает нас в том, почему рассматривать физическое пространство как риманово предпочтительнее, чем как пространство Вейля, или как финслерово, или как проективное пространство, или как какое-нибудь другое, логически возможное.

2) Он не предсказывает, что гравитация является силой притяжения.

При рассмотрении двух основополагающих принципов ОТО теоретико-полевой подход позволяет:

1) получить принцип эквивалентности как следствие, а не как постулат;

2) заменить принцип общей ковариантности на принцип калибровочной инвариантности, который служит в качестве руководства для получения нелинейностей.

Наши исследования показали, что некоторые простые взаимодействия изменяют наблюдаемую метрику с минковской на риманову. Не исключена возможность существования более сложных взаимодействий, которые приведут к пространству с неримановой структурой. Однако в представленном подходе нет путей к геометризации электродинамики. Причина этого в том, что электромагнитное поле действует по-разному на тела с разными зарядами и метрика уже не кажется полезным понятием, если она должна измеряться только с помощью очень специальных объектов. Представленный подход также оставляет открытым вопрос — метрики сомнительным — имеет ли понятие метрики смысл для очень малых масштабов, где все объекты подвержены сильным взаимодействиям. Также и для больших масштабов, где мы можем принимать только световые сигналы, другие понятия могут оказаться существенными. То, что все попытки геометризовать прочие поля провалились, возможно обязано тому факту, что роль геометрических концепций, которые имеют ограниченную физическую применимость, была излишне преувеличена.

Получена 25 апреля 1961 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *von Laue M.* Jahrbuch Radioaki. **14**, 263 (1917).
2. *Abraham M.* Jahrbuch Radioaki. **11**, 470 (1914).
3. *Fierz M.* Helv. Phys. Acta. **12**, 3 (1939).
4. *Gupta S.* Revs. Modern Phys. **29**, 334 (1957).
5. *Feyman R.* Chapel Hill Conference, 1956.
6. *Thirring W.* Fortschr. Physik. **7**, 79 (1959).
7. *Rastal P.* Can. J. Phys. **38**, 975 (1960).
8. *Birkhoff G.D.* Broc. Nat. Ac. **30**, 54 (1944).
9. *Barajas A., Birkhoff G.D., Graf C. Sadoval-Valarta M.* Phys. Rev. **66**,138 (1944).
10. *Yilmaz H.* Phys. Rev. **111**, 1417 (1958).
11. *Belinfante F.J., Swihart J.C.* Ann. Phys. **1**, 168 (1957).
12. *Utiyama R.* Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
13. *Moller C.* «Theory of Relativity.» Oxford Univ. Press, London and New Youk, 1952.
14. *Bergman O.* Am. J. Phys. **24**, 38 (1956).
15. *Moller C.* Math. Phys. Medd. **10**, (1955).
16. *Moshinsky M.* Phys. Rev. **80**, 514 (1950).
17. *Papapetru.* Relativity Congress, Bern, 1955.
18. *Gupta S.N.* Proc. Phys. Soc. **A65**, 608 (1952).
19. *Hund F.* «Einführung in die theoretischePhysik», p.343, Bibliogr. Inst., Leipzig, 1951.
20. *Fock V.* Revs. Modern Phys. **29**, 325 (1957).
21. *Dehneh H., Höul H., Westfahl K.* Ann. Phys. **6**, 371 (1961).