ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 2 1996
Журнал по дискуссионным проблемам гравитационной физики .... *стр. 59–70*

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ

Дж. Калман*

Предлагается ковариантный лагранжев формализм с явной вариацией собственного времени в функционале действия. Данный подход согласуется с геометрической интерпретацией в пространстве-времени. Получено общее уравнение движения, отличное от уравнения Эйлера-Лагранжа. Требование инвариантности при преобразованиях трансляции дает определение импульса и массы. Только в специальном случае электромагнитного поля масса покоя постоянна. Получен закон сохранения, включающий импульс и тензор энергии-импульса свободного поля. В рамках описанного подхода не удается построить удовлетворительного гамильтонова формализма.

Содержание

1. Введение

Предлагались разные методы получения уравнения движения материальной точки в заданном внешнем поле различной тензорной размерности. Метод, открытый Дираком[1] для электромагнитного поля, состоял в вычислении дивергенции от тензора энергии-импульса (ТЭИ) поля в пределах малой области («трубки»), окружающей мировую линию частицы. Этот метод позднее был развит Бхабхой, Хариш-Чандрой[2] и Хавасом[3] для других полей. В применении к слабому гравитационному полю Инфельдом и Валласом[4] впервые использовался другой подход, в нем уравнения движения следовали из нелинейности гравитационного поля. Вывод

*Израильский Технологический Институт, Хайфа, Израиль. Перевод с оригинала: Kalman G., «Lagrangian formalism in relativistic dynamics», 1961, Phys. Rev., **v. 123**, p. 384–390.

уравнений движения из вариации инвариантного лагранжиана иногда использовался, но не был развит общий метод, который должен применяться вне зависимости от тензорных свойств поля. Настоящая заметка ставит целью показать возможности такого подхода.

Если поведение системы «поле + частица» может быть описано с помощью лагранжева формализма, то следует ожидать, что функционал действия состоит из трех частей[5]:

$$S = S^{\text{paticle}} + S^{\text{interaction}} + S^{\text{field}} = \int_{\sigma 1}^{\sigma 2} L^p(\dot{\xi})\, d\tau +$$
$$+ \int_{\Sigma 1}^{\Sigma 2} \int_{\sigma 1}^{\sigma 2} L^i \left(\varphi(x), \varphi_{,\alpha}(x), \dot{\xi}\right) \delta(x-\xi)\, d\tau dx + \int_{\Sigma 1}^{\Sigma 2} \mathcal{L}^f \left(\varphi(x), \varphi_{,\alpha}(x)\right) dx, \tag{1}$$

первая часть содержит только переменные, описывающие частицу, третья — полевые переменные, в то время как член взаимодействия содержит и те и другие. Вариации S^p и S^f дают уравнения движения свободной частицы и свободного поля соответственно; вариация S^{int} по отношению к координатам частиц дает вклад в уравнение движения в поле, а по отношению к координатам поля — неоднородный член в уравнениях поля. Преимущество такой процедуры очевидно: она помогает определить однозначно законы сохранения; получаемое уравнение движения может рассматриваться как уравнение, основанное на простом физическом принципе, и, наконец, процедура готовит почву для перехода от классической к квантовой механике. С этой точки зрения, существенно, хотя и не очевидно, что один и тот же член взаимодействия должен использоваться при выводе этих двух уравнений.

Как хорошо известно в случае электромагнитного поля, описанную выше программу можно выполнить без особых трудностей[6]. Уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана взаимодействия дают точные уравнения движения частицы в электромагнитном поле. Однако, если поле обладает свойствами преобразования, отличными от векторного, этот метод не работает. В этом случае уравнения Эйлера-Лагранжа, полученные для допустимого лагранжиана взаимодействия, не эквивалентны уравнениям движения. Тем не менее, например, как показал Самоси[7], уравнения движения могут быть получены из лагранжиана взаимодействия, если предположить, что существуют два различных лагранжиана: один — для вывода уравнений поля и второй — для уравнений движения частиц. Самоси[8] также было продемонстрировано, что вывод уравнений движения становится более естественным, если собственное время τ заменить на новую независимую переменную $s = \tau/M$, где M — это (в общем случае не постоянная) масса покоя частицы.

Настоящий подход основан на придании геометрического смысла вариационному принципу. Уравнение

$$\delta(S^p + S^i) = 0 \tag{2}$$

будет рассмотрено для нахождения экстремума по траекториям между точками σ_1 и σ_2 в пространстве-времени. Оно отражает движение свободной частицы по геодезической: в самом деле, если $L^{\text{particle}} = m(\text{constant})$, то уравнение (2) дает уравнение движения для свободной частицы. Однако эта интерпретация требует, чтобы τ не рассматривалось как независимый параметр: действительно, оно может изменяться вместе с координатами. Следовательно, канонические уравнения Эйлера-Лагранжа уже не будут дифференциальными уравнениями вариационного принципа. В разд. 2 будет получено модифицированное дифференциальное уравнение, которое идентично уравнению движения. В разд. 3 в рамках нового формализма будут определены импульс и масса. В разд. 4 будет продемонстрировано выполнение закона сохранения импульса. В разд. 5 будет показано, что невозможно в данном подходе построить гамильтонов формализм в общем случае. В разд. 6 полученные уравнения движения будут применены к полям с различными тензорными свойствами, и также будет показано, что уравнения движения, полученные для допустимого лагранжиана взаимодействия, эквивалентны уравнениям движения, которые обычно считаются правильными. Будет показана выделенность электромагнитного поля.

2. Уравнение движения

В этом разделе выводится обобщенное уравнение движения точечной частицы из лагранжиана

$$L = -mc^2 + \int L^i \left(\dot{\xi}, \varphi(x), \varphi_{,\alpha}(x)\right) \delta(x-\xi)\, dx = L(\xi, \dot{\xi}; m). \tag{3}$$

Запись лагранжиана в этой форме предполагает: (i) лагранжиан свободной частицы равен $-mc^2$ (где m — постоянная масса покоя), что эквивалентно требованию движения свободной частицы вдоль геодезической; (ii) лагранжиан взаимодействия зависит только от первой производной координат частиц по времени и только от первых частных производных полевых переменных. Включение высших производных, в принципе, возможно, но не соответствует никаким известным физическим системам. Масса m определяется как масса, измеренная на бесконечности и в состоянии покоя. Отрицательный знак перед mc^2 выбран для того, чтобы получить максимум при варьировании интеграла с целью поиска экстремума.

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе, мы разбиваем вариацию интеграла следующим образом:

$$\delta S = \delta \int_{\sigma 1}^{\sigma 2} L\, d\tau = \int_{\sigma 1}^{\sigma 2} \delta L\, d\tau + \int_{\sigma 1}^{\sigma 2} L \delta\, d\tau. \tag{4}$$

Первый член может быть выражен[9] строго в виде

$$\int \delta L d\tau = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_\mu}\, \delta\xi_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\, \delta\dot{\xi}_\mu \right) d\tau. \tag{5}$$

Необходимо отметить, что при этом δ и оператор $d/d\tau$ не коммутируют и используется следующее соотношение:

$$\delta\dot{\xi}_\mu = (\delta d\xi_\mu/d\tau) - [d\xi_\mu/(d\tau)^2]\delta d\tau. \tag{6}$$

Применяя тождество

$$\delta d\tau = \delta(-d\xi_\mu d\xi_\mu)^{1/2} = -\dot{\xi}_\mu \delta d\xi_\mu, \tag{7}$$

мы получаем, согласно предыдущим выражениям:

$$\int \delta L\, d\tau \equiv \int \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu} \delta\xi_\mu\, d\tau + \int \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} \left(\delta_{\mu\nu} + \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu\right) \delta\, d\xi_\nu. \tag{8}$$

Второй интеграл может быть преобразован с учетом того, что $\delta d\xi_\mu = d\delta\xi_\nu$, и с использованием интегрирования по частям. Окончательно получаем:

$$\int \delta L\, d\tau = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} \left(\delta_{\mu\nu} + \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu\right) \delta\xi_\nu \right|_{\sigma 1}^{\sigma 2} + \int \left\{ \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\nu} (\delta_{\mu\nu} + \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu) \right] \right\} \delta\xi_\mu\, d\tau. \tag{9}$$

Второй член в уравнении (4) вычисляется с использованием уравнения (7):

$$\int L\delta\, d\tau = -\int L\dot{\xi}_\mu \delta\, d\xi_\mu = \left. -L\dot{\xi}_\mu \delta\xi_\mu \right|_{\sigma 1}^{\sigma 2} + \int \frac{d}{d\tau} \left(L\dot{\xi}_\mu\right) \delta\xi_\mu\, d\tau. \tag{10}$$

В итоге, комбинируя (9) и (10), получаем:

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}(\delta_{\mu\nu} + \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu) - L\dot{\xi}_\nu\right] \delta\xi_\nu \Bigg|_{\sigma 1}^{\sigma 2} + \int \left\{\frac{d}{d\tau}\left[L\dot{\xi}_\mu - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\nu}(\delta_{\mu\nu} + \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu)\right] + \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu}\right\} \delta\xi_\mu \, d\tau. \tag{11}$$

Если мы полагаем, что $\delta\xi_\mu(\sigma_1) = \delta\xi_\mu(\sigma_2) = 0$, то уравнение (11) дает следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\dot{\xi}_\mu - L\right)\dot{\xi}_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\right\} = \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu}. \tag{12}$$

Это уравнение должно рассматриваться как уравнение движения частицы, описываемое лагранжианом L. Оно отличается от уравнения Эйлера-Лагранжа членом в скобках в левой части. Этот член исчезает только при условии, что τ не изменяется при варьировании.

3. Импульс и масса

В рамках рассматриваемого формализма установим соотношения между импульсом, массой и лагранжианом. Вспомним, что импульс в классической механике однозначно определяется вследствие инвариантности лагранжиана[10]. В то же время, это определение обеспечивает переход выражения для импульса, определенного таким образом в классической механике, в правильную квантовомеханическую величину, описываемую оператором импульса $-ih\frac{\partial}{\partial x_\mu}$. Наконец, мы рассмотрим, как обычно, вариацию

$$\delta\xi_\mu = \varepsilon_\mu = \text{const} \tag{13}$$

истинной траектории. В таком случае уравнение (11) приводит к

$$\delta S = [P_\mu(\sigma_2) - P_\mu(\sigma_1)]\varepsilon_\mu, \tag{14}$$

где

$$P_\mu = (\partial L/\partial \dot{\xi}_\mu) + [(\partial L/\partial \dot{\xi}_\nu)\dot{\xi}_\nu - L]\dot{\xi}_\mu. \tag{15}$$

Условие инвариантности S относительно преобразований означает, что

$$P_\mu(\sigma_1) = P_\mu(\sigma_2). \tag{16}$$

Уравнение (15) определяет импульс, в то время как уравнение (16) выражает закон сохранения импульса для изолированной системы. В общем случае, когда система не замкнута, закон сохранения импульса принимает более сложный вид. Это мы обсудим в следующем разделе.

Аналогично, определим массу как величину, связанную с преобразованием собственного времени. Для этого мы перепишем уравнение (11), отделяя выражения, которые зависят от $\delta\xi_\mu$, только через $\delta\tau$ во внеинтегральном члене правой части.

$$\delta S = \left[\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\dot{\xi}_\mu\right)\delta\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\delta\xi_\mu\right]\Bigg|_{\sigma 1}^{\sigma 2} + \int \left\{\frac{d}{d\tau}\left[L\dot{\xi}_\mu - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\nu}(\delta_{\mu\nu} + \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu)\right] + \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu}\right\} \delta\xi_\mu \, d\tau. \tag{17}$$

Мы снова рассматриваем вариацию истинной траектории, так что

$$\delta\tau = -\varepsilon = \text{const}, \tag{18}$$

и обращаем внимание на те изменения S, которые вызваны только этой вариацией — $\delta' S$. Тогда мы получаем:

$$\delta' S = [M(\sigma_2) - M(\sigma_1)]\varepsilon, \tag{19}$$

где

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\dot{\xi}_\mu - L. \tag{20}$$

Уравнение (20) определяет переменную массу покоя, которая, в общем случае, является функцией от ξ и $\dot{\xi}$. Согласно нашему определению лагранжиана (3):

$$M = m + \Delta M, \tag{21}$$

где ΔM — поправка, исчезающая в отсутствие взаимодействия.

Наконец, мы можем рассмотреть оставшуюся часть δS, которая обусловлена прямой вариацией ξ_μ. Для этого определим g_μ как

$$g_\mu = \partial L/\partial \dot{\xi}_\mu, \tag{22}$$

которая является прямым вкладом поля в импульс.

Альтернативная формулировка предыдущих результатов может быть дана, если рассмотреть S как функцию координат. Это будет в том случае, если величину $S = \int L d\tau$ приписывать каждой точке пространства и интегрирование проводить вдоль действительной траектории, соединяющей исходную точку с произвольной точкой поля. Тогда

$$S = S(\tau(x), x), \tag{23}$$

и следующие три производные эквивалентны нашим предыдущим определениям:

$$dS/dx_\mu = P_\mu; \quad \partial S/\partial \tau = -M; \quad \partial S/\partial x_\mu = g_\mu. \tag{24}$$

Уравнение движения (12) может быть переписано в простой форме с помощью уравнений (15), (20) и (22):

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu} \tag{25}$$

или, если определить кинетический импульс как

$$p_\mu = M\dot{\xi}_\mu, \qquad P_\mu = p_\mu + g_\mu, \tag{26}$$

в альтернативной форме:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu, \qquad F_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\right). \tag{27}$$

Это уравнение может быть рассмотрено как определение силы, и это более подходящая форма для сравнения со стандартными формами уравнения движения.

В заключение необходимо подчеркнуть, что, в общем случае, существует два различных вклада в импульс частиц от поля: через массу и через g_μ. Только в специальных случаях один из них исчезает. Скалярное поле не имеет импульса поля, в то время как векторное поле оставляет массу инвариантом $m = M$.

4. Сохранение импульса

В этом разделе рассматривается закон сохранения импульса для незамкнутых систем, то есть, для таких, где на пространственно-подобных поверхностях $\sum_1$,

$\sum_2$ поле конечно. Вывод получается стандартным образом, тем не менее, общая формулировка закона сохранения — новая.

Мы рассматриваем общую плотность лагранжиана $\mathcal{L}^{\rm int} + \mathcal{L}^{\rm field}$, отбросив вклад свободной частицы, который является постоянным.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^f(\varphi(x), \varphi_{,a}(x)) + \int \mathcal{L}^i\left(\dot{\xi}, \varphi(x), \varphi_{,a}(x)\right) \delta(x-\xi)\, d\tau = \mathcal{L}\left(\xi, \dot{\xi}, x, \varphi(x), \varphi_{,a}(x)\right) \quad (28)$$

Общая вариация интеграла действия может быть расписана как[11]

$$\delta S = \int_{\sum_1}^{\sum_2} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi_\mu}\, \delta\xi_\mu + \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu}\, \delta x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma)}}\, \delta_0 \varphi_{(\sigma)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma),\mu}}\, \delta_0 \varphi_{(\sigma),\mu} \right) dx, \quad (29)$$

где δ_0 относится к вариации, которая вызывается изменением функциональной формы $\varphi(x)$, а не вариацией x. Мы применяем жесткое перемещение как истинного поля, так и истинной траектории. В этом случае

$$\delta\xi_\mu = \delta x_\mu = \varepsilon, \qquad \delta_0 \varphi_{(\sigma)} = -\varphi_{(\sigma),\mu} \delta x_\mu, \qquad \delta_0 \varphi_{(\sigma),\nu} = -\varphi_{(\sigma),\mu\nu} \delta x_\mu. \quad (30)$$

Последнее соотношение выполняется потому, что общая вариация φ должна стремиться к нулю и, следовательно, обе вариации компенсируют друг друга. Уравнение (29) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \delta S = \int \left(\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma)}}\, \varphi_{(\sigma),\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma),\nu}}\, \varphi_{(\sigma),\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi_\mu} \right) \varepsilon_\mu\, dx = \\ = \int \left\{ \frac{d}{dx_\nu} \left[\mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma),\nu}} \varphi_{(\sigma),\mu} \right] + \left[\frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma),\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{(\sigma)}} \right] \varphi_{(\sigma),\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi_\mu} \right\} \varepsilon_\mu\, dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Вторая скобка в этом выражении равна нулю согласно уравнениям поля[12]. Если ввести канонический ТЭИ сводобного поля

$$T^0_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}^f}{\partial \varphi_{(\sigma),\nu}}\, \varphi_{(\sigma),\mu} + \mathcal{L}^f \delta_{\mu\nu}, \quad (32)$$

и рассмотреть явный вид $\mathcal{L}^i$, то получается следующее выражение:

$$\int \left(\frac{d}{dx_\mu} + \frac{\delta}{\delta \xi_\mu} - \frac{d}{dx_\mu}\, \varphi_{(\sigma),\nu}\, \frac{\partial}{\partial \varphi_{(\sigma),\mu}} \right) \varepsilon_\mu \times \int L\left(\dot{\xi}, \varphi(x), \varphi_{,\alpha}(x)\right) \delta(x-\xi)\, d\tau dx. \quad (33)$$

Далее, пренебрежем последним членом в скобке, который присутствует только в отдельных случаях, когда лагранжиан взаимодействия зависит от производных поля. Тогда уравнение (33) может быть преобразовано к виду:

$$\begin{aligned} \iint \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_\mu} L\left(\dot{\xi}, \varphi(x)\right) \right] \delta(x-\xi)\, d\tau dx + \iint L\left(\dot{\xi}, \varphi(x)\right) \delta(x-\xi) \delta\, d\tau + \\ + \iint L\left(\dot{\xi}, \varphi(x)\right) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\, \delta(x-\xi) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\, \delta(x-\xi) \right] \varepsilon_\mu\, d\tau + \int \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} L(\dot{\xi}, \xi) \varepsilon_\mu\, d\tau. \end{aligned} \quad (34)$$

Третий интеграл тождественно равен нулю. Первый и второй могут быть переписаны с учетом (6), (7) и (15) и с применением интегрирования по частям, как

$$\varepsilon_\mu \left(P_\mu(\sigma_2) - P_\mu(\sigma_1) \right) - \int_{\sigma 1}^{\sigma 2} P_\mu \varepsilon_\mu\, d\tau, \quad (35)$$

которые также зануляются, поскольку ε_μ константа. Таким образом, в уравнении (34) окончательно остается только последний интеграл, который в комбинации с (31), (32) и (33) дает, если использовать уравнение движения (25), закон сохранения импульса:

$$-\int_{\sum_1}^{\sum_2} \frac{dT^0_{\mu\nu}}{dx_\mu}\, dx = P_\nu(\sigma_2) - P_\nu(\sigma_1). \tag{36}$$

Мы прокомментируем этот результат следующим образом:

а) для канонического импульса выполняется закон сохранения; для кинетического импульса нет закона сохранения.

б) в законе сохранения присутствует только ТЭИ свободного поля. Как мы предполагаем на основе простой физической картины, это, в действительности, описывает процесс в виде потока импульса от поля к частице.

в) если лагранжиан взаимодействия содержит также и производные потенциала, то опущенный член в уравнении (33) должен быть учтен, и тогда простой закон сохранения (36) не выполняется. В этом случае необходимо работать с полным ТЭИ, который зависит и от источников тоже. Закон сохранения, выраженный через этот тензор, не является физически ясным и практически полезным. Кроме того, для этого случая не существует закона сохранения в простой форме. И мы склонны полагать, что причиной для усложнения является тот факт, что в физических случаях зависимость лагранжиана взаимодействия от производных потенциала существует только тогда, когда частица имеет в некотором роде внутреннюю структуру[13]. Но поскольку современные рассмотрения относятся только к бесструктурным частицам, то не удивительно, что невозможно достигнуть последовательного описания.

Уравнение (36) может быть выражено в альтернативной форме через ТЭИ частицы:

$$T^p_{\mu\nu} = \int \dot{\xi}_\mu\,(\tau(\xi))\, P_\nu\,(\tau(\xi))\,\delta(x-\xi)\, d\tau. \tag{37}$$

И мы можем получить

$$\int \frac{dT^p_{\mu\nu}}{dx_\mu}\, dx = \iint P_\nu \dot{\xi}_\mu \frac{d}{dx_\mu}\delta(x-\xi)\, d\tau dx = \int \frac{d}{d\xi_\mu}(P_\nu \dot{\xi}_\mu)\, d\tau =$$

$$= -\int \dot{\xi}_\mu \frac{d}{d\tau}\,(P_\nu \dot{\xi}_\mu)\, d\tau = -\int \left(\dot{\xi}_\mu \dot{P}_\nu \dot{\xi}_\mu + \dot{\xi}_\mu P_\nu \frac{d\dot{\xi}_\mu}{d\tau} \right) d\tau = P_\nu(\sigma_2) - P_\nu(\sigma_1). \tag{38}$$

Сравнивая уравнения (36) и (38), мы можем переформулировать закон сохранения в следующем виде:

$$(d/dx)(T^0_{\mu\nu} + T^p_{\mu\nu}) = 0. \tag{39}$$

Отметим, что ТЭИ частицы, в общем случае, несимметричен.

5. О гамильтоновом формализме

В этом разделе мы коснемся возможности применения гамильтонова формализма и покажем, что нет удовлетворительного гамильтонова формализма, который мог бы быть разработан в рамках представленной теории. Причина трудностей в том, что в нашем формализме

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} \equiv g_\mu \neq P_\mu, \tag{40}$$

а канонические уравнения эквивалентны уравнениям движения только при выполнении равенства в описанном выше условии. При попытке найти допустимый гамильтониан мы можем рассмотреть различные свойства гамильтониана и выбирать по очереди каждое из них в качестве определения. Тогда можно показать, что остальные условия не удовлетворяются. Любое из следующих свойств можно рассматривать в качестве определения:

(i) гамильтониан должен описываться уравнением Гамильтона-Якоби;

(ii) он должен удовлетворять каноническим уравнениям;

(iii) его численное значение должно быть равно энергии покоя частицы.

Мы рассмотрим здесь подробно возможность определения гамильтониана через свойства (i) и (ii), поскольку эти результаты имеют определенный интерес.

Условие (i) определяет гамильтониан из уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + H(\xi, P) = 0. \tag{41}$$

Тогда из уравнения

$$L = \frac{dS}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \tau} + \dot{\xi}_\mu \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_\mu}\right) \tag{42}$$

мы находим

$$H = P_\mu \dot{\xi}_\mu - L. \tag{43}$$

Это находится в соответствии со стандартной формой гамильтониана. Однако, легко показать, что, вследствие уравнения (40), он не может удовлетворить каноническим уравнениям. Действительно, дифференцированием получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = P_\nu \left(\frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial \xi_\mu}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_\mu}\right)_P = -\dot{P}_\mu + \frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial \xi_\mu}\left[P_\mu - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\right)\right] \tag{44}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial P_\mu} = \dot{\xi}_\nu + \frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial P_\mu}\left[P_\nu - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\nu}\right)\right]. \tag{45}$$

Гамильтониан (43) имеет, однако, интересное свойство, согласно уравнению (15):

$$\dot{\xi}_\mu P_\mu = L, \tag{46}$$

и, таким образом,

$$H(\xi, P) \equiv 0; \qquad S = \int^{\xi} P_\mu \, d\xi_\mu; \qquad \partial S/\partial \tau = 0. \tag{47}$$

Можно использовать эти соотношения при переходе к квантовой механике (ср. ссылку 7).

Если условие (ii) рассматривать как определение, тогда канонические уравнения служат в качестве дифференциальных уравнений, определяющих неизвестный гамильтониан. Первое каноническое уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = -\dot{P}_\mu = -\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_\mu}\right)_P + g_\nu \frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial \xi_\mu} \tag{48}$$

может быть проинтегрировано:

$$H = -L + g_\mu \dot{\xi}_\mu - \int (\partial g_\nu / \partial \xi_\mu) \dot{\xi}_\nu \, d\xi_\mu + \alpha(P), \tag{49}$$

где $\alpha(P)$ — произвольная функция импульса. Подставляя уравнение (49) во второе каноническое уравнение, мы получаем

$$\frac{\partial H}{\partial P_\mu} = -\frac{\partial L}{\partial P_\mu} + \frac{\partial g_\nu}{\partial P_\mu}\dot{\xi}_\nu + g_\nu\frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial P_\mu} - \frac{\partial}{\partial P_\mu}\int \frac{\partial g_\nu}{\partial \xi_\lambda}\dot{\xi}_\lambda \, d\xi_\nu + \frac{\partial \alpha}{\partial P_\mu}. \tag{50}$$

И так как

$$\frac{\partial L}{\partial P_\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\nu}\frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial P_\mu} = g_\nu \frac{\partial \dot{\xi}_\nu}{\partial P_\mu}, \tag{51}$$

то уравнение (50) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu}\alpha(P) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial g_\nu}{\partial P_\mu}\right)\dot{\xi}_\nu + \frac{\partial}{\partial P_\mu}\int \frac{\partial g_\nu}{\partial \xi_\lambda}\dot{\xi}_\nu \, d\xi_\lambda. \tag{52}$$

Можно показать, что уравнение (52) не имеет решения в общем случае. В частных случаях, однако, можно получить решение. Таковым является случай электромагнитного поля, когда $\alpha = {}^1\!/_2 m^{-1} P_\mu P_\mu$ и $H = {}^1\!/_2 m^{-1}(P_\mu - e\varphi_\mu)(P_\mu - e\varphi_\mu)$. Если же мы рассматриваем скалярное поле, $g_\mu = 0$ и уравнение (52) является внутренне противоречивым, так как правая часть уравнения зависит от ξ, в то время как левая — нет.

И, наконец, мы отметим, что определение

$$H = M = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu}\right)\dot{\xi}_\mu - L, \tag{53}$$

согласно условию (iii), также не приемлемо. Как легко увидеть, оно не удовлетворяет ни уравнению Гамильтона-Якоби, ни каноническим уравнениям.

6. Приложения

В этом разделе мы сделаем обзор применений развитого выше формализма к конкретным физическим полям. Будет рассмотрено движение частицы в скалярном, векторном (электромагнитном) и тензорном (слабом гравитационном) полях. Руководящим принципом в построении лагранжиана взаимодействия является «принцип простоты»[14], который требует простое инвариантное выражение, сконструированное из полевых переменных и 4-скорости частицы. С другой стороны, мы можем легко показать, что лагранжиан, построенный таким образом, дает возможность получить корректные (неоднородные) уравнения поля.

А. Скалярное поле

В случае скалярного поля со скалярным потенциалом φ и константой взаимодействия g мы выбираем лагранжиан[15] в виде

$$L = -mc^2 - g\varphi. \tag{54}$$

Тогда с помощью уравнений (15), (20), (22) и (27) мы получаем:

$$P_\mu = p_\mu = [m + g/c^2\varphi]\dot{x}_\mu; \quad g_\mu = 0; \quad M = m + \frac{g}{c^2}\varphi; \quad F_\mu = -g\,\frac{\partial\varphi}{x_\mu}. \tag{55}$$

Отметим, что масса покоя не постоянна. Этот результат находится в соответствии с результатами Маркса и Самоси[7,16]. Сравнение с результатами Хаваса[3] и Бхабха, Хариша-Шандра[2], основанных на методе Дирака, затруднено, так как в уравнениях, полученных этими авторами, члены «реакции излучения» переплетаются с прямым эффектом поля.

Уравнение движения в скалярном поле записывается в окончательной форме как

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{g}{c^2}\varphi\right)\dot{x}_\mu\right]=-g\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \tag{56}$$

Б. Векторное поле

Лагранжиан в векторном поле, которое может быть отождествлено с электромагнитным полем (ибо мы рассматривем только безмассовое поле), с векторным потенциалом φ_μ и константой взаимодействия e, принимает вид:

$$L=-mc^2+e\dot{x}_\mu\varphi_\mu. \tag{57}$$

Из него мы получаем соотношения:

$$\begin{gathered} P_\mu=m\dot{x}_\mu+e\varphi_\mu;\quad M=m;\quad g_\mu=e\varphi_\mu;\\ F_\mu=eF_{\mu\nu}\dot{x}_\nu;\quad F_{\mu\nu}\equiv\varphi_{\mu,\nu}-\varphi_{\nu,\mu}, \end{gathered} \tag{58}$$

которые соответствуют стандартным формам импульса, массы и силы электромагнитного поля. Заслуживает внимания тот факт, что масса покоя сохраняется и это является фундаментальной особенностью векторного поля. Уже беглый взгляд на уравнение (20) дает основания для этого: лагранжиан взаимодействия является однородным выражением первого порядка по $\dot{\xi}_\mu$, а два члена $\partial L/\partial\dot{\xi}_\mu$ и L компенсируют друг друга. В то же время эти рассуждения доказывают, что другого поля с таким свойством не существует.

В. Тензорное поле

Лагранжиан тензорного поля (тензорный потенциал $\varphi_{\mu\nu}$, константа взаимодействия f) может быть выбран в виде

$$L=-mc^2-\frac{1}{2}f\dot{x}_\mu\varphi_{\mu\nu}\dot{x}_\nu. \tag{59}$$

Очевидно, что тензорный потенциал $\varphi_{\mu\nu}$ должен быть симметричным, если нет, то антисимметричная часть не играет роли.

Этот лагранжиан приводит к следующим выражениям:

$$\begin{gathered} P_\mu=[m-(f/2c^2)\dot{x}_\alpha\varphi_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta]\dot{x}_\mu-f\varphi_{\mu\nu}\dot{x}_\alpha,\\ M=m-(f/2c^2)\dot{x}_\alpha\varphi_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta,\\ g_\mu=-f\varphi_{\mu\alpha}\dot{x}_\alpha,\\ F_\mu=f(\dot{x}_\alpha F_{\alpha\mu\beta}\dot{x}_\beta+\ddot{x}_\alpha\varphi_{\alpha\mu}),\\ F_{\alpha\mu\beta}=-1/2(\varphi_{\alpha\beta,\mu}+\varphi_{\alpha\mu,\beta}+\varphi_{\mu\beta,\alpha}). \end{gathered} \tag{60}$$

Уравнение движения может быть записано в следующей форме:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\left(m-\frac{f}{c^2}\dot{x}_\alpha\varphi_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta\right)\dot{x}_\mu-f\varphi_{\mu\alpha}\dot{x}_\alpha\right\}=-\frac{1}{2}f\,\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\,\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta. \tag{61}$$

Если f связать с постоянной массой покоя, то уравнение (61) может рассматриваться как уравнение движения частицы в слабом гравитационном поле. Действительно, если мы начнем с общего уравнения движения в гравитационном поле

$$g_{\mu\nu}\frac{du^\nu}{ds} = -\Gamma_{\mu,\alpha\beta}u^\alpha u^\beta, \qquad \Gamma_{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}\right) \tag{62}$$

и воспользуемся приближением слабого поля

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \tag{63}$$

пренебрегая вторым и более высокими порядками по $\varphi_{\mu\nu}$, то легко устанавливается тождество уравнений (61) и (62). Необходимо только нетривиальным образом учесть различие между $ds(u^\nu = dx^\nu_\nu/ds)$ и $d\tau(\dot{x}_\nu = dx/d\tau)$:

$$\begin{gathered} d\tau^2 = -dx_\mu dx_\mu,\ ds^2 = -g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu = -(\delta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu})\,dx^\mu dx^\nu = d\tau^2(1 - \dot{x}_\mu\varphi_{\mu\nu}\dot{x}_\nu), \\ \frac{d}{ds} = \frac{d\tau}{ds}\frac{d}{d\tau} = \left(1 + \frac{1}{2}\dot{x}_\alpha\varphi_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta\right)\frac{d}{d\tau}. \end{gathered} \tag{64}$$

Из уравнений (62), (63) и (64)[17] может быть получено уравнение (61). Отметим, что в этом случае механизм изменения массы покоя может быть обьяснен: физически существует и может быть измерено только собственное время s, τ является физически бессмысленной абстракцией. Наблюдатель, движущийся вместе с пробной частицей, найдет изменяющуюся массу покоя только, если он искусственно заставит свои часы измерять τ; в противном случае, он не обнаружит изменения массы. В случае других полей изменение массы покоя может иметь подобную причину, но не может быть обьяснено в отсутствие соответствующих нелинейных теорий. Однако, размышления в этом направлении[8] указывают на такие возможности.

7. Заключение

В этой статье разработан ковариантный последовательный лагранжев формализм. Уравнения движения в произвольном поле могут быть получены в рамках этого формализма из простых принципов. Основные выводы из этого формализма следующие:

(а) уравнение движения не является уравнением Эйлера-Лагранжа для лагранжиана;

(б) масса покоя частицы, в общем случае, не постоянна; она постоянна только в векторном поле;

(в) канонический импульс, в общем случае, отличен от кинетического импульса; они совпадают только в скалярном поле;

(г) канонический импульс и ТЭИ *свободного* поля объединяются в сохраняющуюся систему в случае отсутствия зависимости лагранжиана взаимодействия от производных поля, в противном случае этого не происходит;

(д) невозможно разработать удовлетворительный аналог гамильтонова формализма; в общем случае нет функции, которая бы удовлетворяла каноническим уравнениям.

Благодарности

Автор благодарен профессору Дж. Самоси за многократные, стимулирующие дискуссии и за предоставление им еще не опубликованных результатов. Автор также благодарен доктору Р. Инглман за дискуссии по обсуждаемой теме.

ПРИМЕЧАНИЯ И БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Dirac P.A.M.* Proc. Roy. Soc. (London) **A167**, 148 (1938).
2. *Bhabha H.J., Harish-Chandra*, Proc. Roy. Soc. (London) **A183**, 134 (1944); **A185**, 250 (1946); *Harish-Chandra*, Proc. Roy. Soc. (London) **A185**, 269 (1946).
3. it Havas P. Phys. Rev. **87**, 309 (1952); **91**, 997 (1952); **93**, 882 (1954); and **113**, 732 (1959).
4. *Infeld L., Wallace P.R.* Phys. Rev. **57**, 797 (1940).
5. Мы используем следующие обозначения: x_μ — это координаты поля, ξ_μ — координаты частицы, x, ξ (без индекса) — обозначают 4-координаты, dx — 4-мерный элементарный обьем, деленный на ic, τ — собственное время. Четвертая компонента вектора является мнимой; метрика не вводится. $\sum_1$ и $\sum_2$ обозначают две пространственно-подобные поверхности, σ_1 и σ_2 — две точки на них. L — лагранжиан, $\mathcal{L}$ — плотность лагранжиана, φ обозначает набор переменных поля, $\varphi_{(\sigma)}$ — одну из компонент, переменная в скобках может соответствовать индексам $1, 2, ..n$ или опускаться, в зависимости от трансформационных свойств поля.
6. *Landau L., Lifschitz E.*, Classical Theory of Fields. (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1951), translated by M. Hamermesh, p. 70.
7. *Szamosi G.* Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958 (United Nations, Geneva, 1958), Vol. 30.
8. *Szamosi G.* частное сообщение (в печати).
9. Начиная с этого момента, мы используем новые единицы, в которых $c = 1$. Пределы интегрирования далее везде опускаются.
10. *Noether E.* Nachr. kgl. Gen. Wiss. Gottingen. (1918), 235; *Rzewuski J.* Field Theory (Panstwowe Wydawuictwo Naukowe, Warsaw, 1958), Vol.1, p. 131.
11. Здесь мы должны проводить строгое различие между частной, полной и функциональной производными. Как правило, везде используется функциональная производная, но, если плотность лагранжиана зависит только от переменной, то функциональная производная заменяется на частную, в случае же, когда лагранжиан выражается через неопределенную функциональную форму, то производная подразумевается полная; в других случаях, как, например, в случае ξ_μ, мы должны сохранить вид $\delta\mathcal{L}/\delta\xi_\mu$ из-за вариации $d\tau$.
12. *Rzewuski J.*, ссылка 8, p.99.
13. Это — экспериментальный факт. Конечно, в принципе, мы можем иметь зависимость лагранжиана взаимодействия от производных поля и для бесструктурных частиц.
14. *Roman P.* Theory of Elementary Particles (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960), p.101.
15. В этом разделе мы опускаем c и пренебрегаем различием между x и ξ.
16. *Marx G., Szamosi G.* Acta Physica. Acad. Sci. Hung. **4**, 219 (1954).
17. Поскольку мы рассматриваем только лоренц-инвариантные уравнения, то мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными индексами, поэтому эти уравнения не совсем корректны с точки зрения тензорной записи.