ЭНЕРГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

ПОСТНЬЮТОНОВСКИЕ ПОЛИТРОПЫ В АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

Ощепков С.А., Райков А.А.

Для анализа устойчивости компактных объектов в рамках альтернативной теории гравитации необходимо знать релятивистские поправки к общей энергии компактного объекта. Для политропного уравнения состояния $P = K\rho^{1+1/n}$ все постньютоновские поправки ОТО к гравитационной энергии включают интегралы вида $I_{abcd} = \int \vartheta^{an+b}(\vartheta')^c\xi^d\,d\xi$, где n — индекс политропы, a, b, c, d — целые числа, а ϑ' — производная функция Эмдена $\vartheta(\xi)$. В предлагаемой работе показывается, что все интегралы рассматриваемого вида, встречающиеся в постньютоновских поправках, сводятся к одному (в работе выбран I_{1202}). Приводятся аналитические выражения других интегралов через I_{1202} и таблица последнего, что позволяет без использования в дальнейшем численных методов определять постньютоновские поправки к гравитационной энергии компактных объектов для широкого набора альтернативных релятивистских теорий гравитации.

Содержание

1. Введение

Одним из важных астрофизических приложений альтернативных теорий гравитации является устойчивость релятивистских компактных объектов различных масс (нейтронные звезды, сверхмассивные компактные объекты в активных ядрах галактик, галактики). Для анализа устойчивости объектов необходимо знать релятивистские поправки к общей энергии компактного объекта [1–4]. В рамках ОТО данная задача была решена Фаулером [2] для политропных моделей. В данной работе предлагается метод аналитического расчета устойчивости релятивистских компактных объектов в любой теории гравитации.

Для политропного уравнения состояния $P = K\rho^{1+1/n}$ все постньютоновские поправки к гравитационной энергии включают в себя интегралы вида:

$$I_{abcd} = \int \vartheta^{an+b}(\vartheta')^c\xi^d\,d\xi,$$

где n — индекс политропы, a, b, c, d — целые числа, а ϑ' — производная функции Эмдена $\vartheta(\xi)$. В предлагаемой работе показывается, что все интегралы рассматриваемого вида, встречающиеся в постньютоновских поправках, сводятся к одному (в работе выбран I_{1202}). Мы приводим аналитические выражения других интегралов через I_{1202} и таблицу последнего, что позволяет без использования в дальнейшем численных методов определять постньютоновские поправки к гравитационной энергии компактных объектов.

2. Классическая энергия политроп

Все аналитические расчеты для политропных моделей связаны с группой политропных функций вида:
$$f_{abcd} = \vartheta^{an+b}(\vartheta')^c\xi^d. \tag{1}$$
и с интегралами
$$I_{abcd} = \int f_{abcd}\, d\xi \tag{1'}$$
Внутри группы функций $\{f_{abcd}\}$ можно определить операцию дифференцирования по ξ. Согласно уравнению Лейна–Эмдена:
$$\vartheta'' = -\frac{2}{\xi}\,\vartheta' - \vartheta^n, \tag{2}$$
и, следовательно,
$$f'_{abcd} = (an+b)f_{a,b-1,c+1,d} + (d-2c)I_{a,b,c,d-1} - c^* I_{a+1,b,c-1,d}. \tag{3}$$
Интегрирование этого выражения, дает соотношение для интегралов I_{abcd}:
$$(an+b)f_{a,b-1,c+1,d} + (d-2c)I_{a,b,c,d-1} - cI_{a+1,b,c-1,d} = f_{abcd}. \tag{3'}$$
Отметим, что линейное отношение (3′) для интегралов I_{abcd} включает в себя интегрирование по частям в общем виде, т. к. получено из формулы (3) и уравнения Лейна–Эмдена (2), следовательно, использование формулы (3′) автоматически влечет за собой использование всех методов интегрирования интегралов I_{abcd}.

Продемонстрируем преимущество использования соотношений (3) и (3′) для получения аналитической зависимости классической энергии от радиуса. Классическая энергия политропы $E_{\text{кл}}$, определенная как сумма тепловой W и гравитационной энергии U, есть:
$$E_{\text{кл}} = W + U = \int \varepsilon\, dm - \int \frac{Gm}{r}\, dm, \tag{4}$$
где $\varepsilon = nP/\rho$ — тепловая энергия на единицу массы, а m — масса внутри сферы радиусом r. Через стандартные безразмерные переменные ϑ и ξ, определенные как
$$\rho = \rho_c\vartheta^n, \quad r = \alpha\xi, \quad \alpha = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\,\rho^{1/n-1}\right]^{1/2}, \tag{5}$$
получаем
$$\begin{gathered} W = \omega I_{1102} = \omega\int \vartheta^{n+1}\xi^2\, d\xi, \\ U = \frac{n+1}{n}\,\omega I_{1013} = \frac{n+1}{n}\,\omega\int \vartheta^n\vartheta'\xi^3\, d\xi, \end{gathered} \tag{6}$$
где $\omega = 4\pi\alpha^3 nP_c$, а P_c — давление в центре политропы.

Интегралы I_{1102}, I_{1013} для классической энергии, также как и интеграл для массы

$$I_{1002} = \int \vartheta^n \xi^2 \, d\xi = -\vartheta' \xi^2 = f_{0012}, \tag{7}$$

вычисляется аналитически внутри группы $\{f_{abcd}\}$:

$$\begin{aligned} I_{1102} &= \frac{1}{n-5} \left[(n+1)\xi^2 \vartheta'(\xi\vartheta' + \vartheta) + 2\vartheta^{n+1}\xi^3 \right] = \\ &= -\frac{1}{n-5} \left[(n+1)(f_{0023} + f_{0112}) + 2 f_{1103} \right] \end{aligned} \tag{8}$$

$$I_{1013} = \frac{1}{n-5} \left[\vartheta^{n+1}\xi^3 + 3\xi^2 \vartheta'(\xi\vartheta' + \vartheta) \right] = \frac{1}{n-5} \left[3f_{0023} + 3f_{0112} + f_{1103} \right] \tag{9}$$

Этот результат можно получить эвристически, комбинируя стандартные методы интегрирования. Если же использовать линейные соотношения (3) и (3′), то результат получается последовательно. Действительно, подставляя интегралы I_{1102} и I_{1013} последовательно в каждое из трех слагаемых соотношения (3′), получим шесть уравнений — три из которых дают невырожденную линейную систему для интегралов I_{1102}, I_{1013} и I_{0022}:

$$\begin{cases} I_{0022} - 2I_{1013} &= f_{0023}, \\ I_{0022} - I_{1102} &= f_{0112}, \\ (n+1)\, I_{1013} + 3I_{1102} &= f_{1103}. \end{cases}$$

Таким образом, подставляя (6), (8) и (9) в (4), получаем зависимость классической энергии политропы от безразмерного радиуса ξ:

$$E_{\text{кл}}(\xi) = \frac{4\pi\alpha^3 P_c}{n-5} \left[\frac{1-n}{n} \vartheta^{n+1}\xi^3 + (n+1)(3-n)\xi^2 \vartheta'(\xi\vartheta' + \vartheta) \right]. \tag{10}$$

Для всей политропы ($\xi = \xi_1$) получается известная формула для полной энергии:

$$E_{\text{кл}} = 4\pi\alpha^3 P_c \, \frac{(n+1)(3-n)}{n-5} \, \xi_1^3 (\vartheta')^2. \tag{11}$$

3. Энергия постньютоновских политроп

Политропные модели звезд являются однопараметрической последовательностью равновесных звезд с одним уравнением состояния, но с различными центральными плотностями ρ_c. Поэтому для исследования устойчивости постньютоновских политроп необходимо знать зависимость полной энергии $E(M, \rho_c)$ от массы M и от плотности в центре ρ_c. При этом, если равенство нулю первой производной E по ρ_c дает зависимость массы M от ρ_c для равновесных конфигураций, то знак второй производной E по ρ_c является критерием устойчивости этих равновесных состояний [3, 4].

Запишем энергию постньютоновских политроп в виде:

$$E = E_{\text{кл}} + \Delta W + \Delta U, \tag{12}$$

где ΔW — релятивистская поправка к тепловой энергии, обусловленная отклонением от политропного уравнения состояния, а ΔU — релятивистская поправка к ньютоновской гравитационной энергии. Если поправка ΔW к тепловой энергии рассчитывается стандартным образом [4] не через интеграл из класса I_{abcd} (и мы на ее вычислении останавливаться не будем), то релятивистская поправка ΔU к гравитационной энергии постньютоновских политроп зависит от привлекаемой к рассмотрению релятивистской теории гравитации и, как будет показано ниже на примере ОТО, сводится к одному интегралу из класса I_{abcd}.

В общей теории относительности постньютоновская поправка к гравитационной энергии дается выражением [3]:

$$\Delta U_{GR} = I_{(1)} + I_{(2)} + I_{(3)} + I_{(4)} + I_{(5)}, \tag{13}$$

где

$$I_1 = -\frac{G}{c^2}\int\limits_0^M \varepsilon\,\frac{m\,dm}{r}, \tag{14}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\frac{G^2}{c^2}\int\limits_0^M \frac{m^2\,dm}{r^2}, \tag{15}$$

$$I_3 = -\frac{G}{c^2}\int\limits_0^M \left(\int\limits_0^m \varepsilon\,dm\right)\frac{dm}{r}, \tag{16}$$

$$I_4 = \frac{G^2}{c^2}\int\limits_0^M \left(\int\limits_0^m \frac{m\,dm}{r}\right)\frac{dm}{r}, \tag{17}$$

$$I_5 = -\frac{G^2}{c^2}\int\limits_0^M \left(\int\limits_0^r mr\,dr\right)\frac{m\,dm}{r^4}. \tag{18}$$

Покажем прежде всего, что все эти интегралы для политропных моделей принадлежат классу I_{abcd}. Первые два интеграла переписываются в безразмерных переменных как:

$$I_{(1)} = \frac{n}{n+1}\,\omega_1 I_{1113}, \tag{19}$$

$$I_{(2)} = -\frac{1}{2}\,\omega_1 I_{1024}, \tag{20}$$

где

$$\omega_1 = \frac{G^2}{c^2}\frac{(4\pi)^{2/3}}{|\vartheta_1'\xi_1^2|^{7/3}}\,M^{7/3}\rho^{2/3} \tag{21}$$

и $\vartheta_1' = \vartheta'(\xi_1)$. А переходя в интегралах $I_{(3)}$ и $I_{(4)}$ к стандартным безразмерным переменным (5), воспользуемся формулами для тепловой и гравитационной энергий как функций от радиуса ξ (6), (8) и (9):

$$I_{(3)} = \frac{n}{n-5}\,\omega_1\left(I_{1024} + I_{1113} + \frac{2}{n+1}\,I_{2104}\right), \tag{22}$$

$$I_{(4)} = -\omega_1\left(\frac{1}{n-5}\,I_{1024} + 3I_{1024} + 3I_{1113}\right). \tag{23}$$

Последний интеграл $I_{(5)}$, интегрированием по частям ($Gm\,dm/r^4 = 4\pi\,dP$), сводится к $I_{(1)}$, следовательно, получаем:

$$I_{(5)} = \frac{1}{n}\,I_{(1)} = \frac{1}{n+1}\,\omega_1 I_{1113}. \tag{24}$$

Таким образом, определение постньютоновской поправки ΔU_{GR} приводит к вычислению трех интегралов I_{1113}, I_{1024}, I_{2104} из класса I_{abcd}. Как известно [3–6], применение различных методов интегрирования (что никогда не гарантирует полного перебора вариантов) дает выражение ΔU_{GR} через два интеграла. Это интегралы $I_{(1)}(I_{1113})$ и $I_{(2)}(I_{1024})$ в работах [3, 4], или I_{1202} и I_{2104} в [5]. Использование метода, изложенного в предыдущем разделе и основанного на применении соотношений (3) и (3′), позволяет получить все возможные линейные соотношения между интегралами класса I_{abcd} и выразить ΔU через один интеграл. Действительно, соотношения (3) и (3′) позволяют, добавив к исходным интегралам интегралы I_{0033}, I_{1202} и I_{0122}, получить пять линейных уравнений типа (3′) с правыми частями f_{1114}, f_{0034}, f_{1203}, f_{0123} и f_{0212}. Это обстоятельство хотя и не дает возможности вычислить искомые интегралы аналитически в группе $\{f_{abcd}\}$, но допускает выразить их все через один (для определенности выберем I_{1202}):

$$I_{1113} = \frac{1}{n+2}\,\vartheta^{n+1}\xi^3 - \frac{3}{n+2}\,I_{1202}, \tag{25}$$

$$I_{1024} = -\frac{2}{3}\,\vartheta(\vartheta')^2\xi^3 - \frac{4}{3(n+2)}\,\vartheta^{n+2}\xi^3 - \frac{1}{3}\,\vartheta^2\vartheta'\xi^2 - \frac{1}{3}\,(\vartheta')^3\xi^4 - \frac{n-10}{3(n+2)}\,I_{1202}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} I_{2104} = \frac{2(1-2n)}{3(n+2)}\,\vartheta^{n+2}\xi^3 - \vartheta^{n+1}\vartheta'\xi\,\frac{2(n+1)}{3}\,\vartheta(\vartheta')^2\xi^3 - \\ -\frac{n+1}{3}\,\vartheta^2\vartheta'\xi^2 - \frac{n+1}{3}\,(\vartheta')^3\xi^4 - \frac{(n-8)(n-1)}{3(n+2)}\,I_{1202}. \end{aligned} \tag{27}$$

Следовательно, искомые интегралы (14–18) выражаются все через один I_{1202}:

$$I_{(1)} = -\frac{3n}{(n+1)(n+2)}\,\omega_1 I_{1202}, \tag{28}$$

$$I_{(2)} = \frac{1}{6}\,\omega_1\left((\vartheta')^3\xi^4 - \frac{n-10}{n+2}\,I_{1202}\right), \tag{29}$$

$$I_{(3)} = \omega_1\left(\frac{n}{5-n}\,(\vartheta')^3\xi^4 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\,I_{1202}\right), \tag{30}$$

$$I_{(4)} = \omega_1\left(-\frac{n+4}{3(5-n)}\,(\vartheta')^3\xi^4 + \frac{n-1}{3(n+2)}\,I_{1202}\right), \tag{31}$$

$$I_{(5)} = -\frac{3}{(n+1)(n+2)}\,\omega_1 I_{1202}. \tag{31}$$

В итоге, подставляя (28–32) в (13) и учитывая, что на поверхности политропы $\vartheta(\xi_1) = 0$, получаем релятивистскую поправку ΔU_{GR} к гравитационной энергии политропы в ОТО:

$$\Delta U_{GR} = \frac{G^2}{c^2}\,k_{GR} M^{7/3}\rho^{2/3}, \tag{33}$$

где

$$k_{GR} = -\frac{(4\pi)^{2/3}}{2|\vartheta_1'\xi_1^2|^{7/3}}\left[\frac{n+5}{n+1}\,I_{1202} + \frac{n-1}{n-5}\,(\vartheta')^3\xi^4\right]. \tag{34}$$

В таблице приводятся численные значения интеграла I_{1202} для различных индексов n. В частности, для двух значений политропных индексов $n = 1$ и $n = 5$ интеграл I_{1202} вычисляется аналитически:

$$I_{n=1} = \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = \frac{1}{4}\,(3\mathrm{Si}(\pi) - \mathrm{Si}(3\pi)) = 0.97025, \tag{35}$$

$$I_{n=5} = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^3/3)^{7/2}}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{5}. \tag{36}$$

Для политроп с индексом $n = 3$ формула (34) дает известное значение $k_{GR} = -0.9183$, знак которого и приводит к неустойчивости сверхмассивных звезд в ОТО.

Таблица 1.

n	ξ_1	$\int \vartheta^{n+2}\xi^2\,d\xi$	$-(\vartheta')^3\xi_1^4$	$-\vartheta'\xi_1^2$
0	$\sqrt{6}$	$16\sqrt{6}/35$	$8\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$
0.5	2.7527	1.03804	7.1772	3.7888
1	π	0.97026	π	π
1.5	3.6538	0.91329	1.49755	2.7141
2	4.3529	0.86492	0.73972	2.41105
2.5	5.3553	0.82358	0.36484	2.18721
2.9	6.5264	0.79478	0.20179	2.04840
3.0	6.8969	0.78812	0.1728	2.01824
3.1	7.3085	0.78166	0.14747	1.98970
3.5	9.5358	0.75773	0.074308	1.89056
4	14.9716	0.73184	0.025899	1.79723
4.9	171.414	0.69592	0.000175	1.7355

4. Заключение

Приведем в явном политропном виде выражения интегралов, встречающихся при вычислении релятивистских поправок к ньютоновской энергии ΔU_{GR} через I_{1202}:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\xi_1} \vartheta^{n+1}(\vartheta')\xi^3\,d\xi &= -\frac{3}{n+2}\int_0^{\xi_1}\vartheta^{n+2}\xi^2\,d\xi,\\
\int_0^{\xi_1} \vartheta(\vartheta')^2\xi^2\,d\xi &= \frac{1}{2}\int_0^{\xi_1}\vartheta^{n+2}\xi^2\,d\xi,\\
\int_0^{\xi_1} (\vartheta')^3\xi^3\,d\xi &= \frac{n-10}{2(n+2)}\int_0^{\xi_1}\vartheta^{n+2}\xi^2\,d\xi,\\
\int_0^{\xi_1} \vartheta^n(\vartheta')^2\xi^4\,d\xi &= -\frac{1}{3}\,(\vartheta')^3\xi^4 - \frac{(n+1)(n-8)}{3(n+2)}\int_0^{\xi_1}\vartheta^{n+2}\xi^2\,d\xi.
\end{aligned}$$

Таким образом, использование возможности дифференцирования по ξ внутри группы функций $f_{abcd} = \vartheta^{an+b}(\vartheta')^c\xi^d$ упрощает вычисления для политропных моделей. Это свойство группы (3) позволяет последовательно получить, например, зависимость классической энергии политропы от радиуса (10). Особенно полезно использование соотношений (3) и (3′) для определения постньютоновских поправок к гравитационной энергии в различных релятивистских теориях гравитации. Так для ОТО эта поправка ΔE_{GR} выражается через один интеграл из класса I_{abcd} (28), тогда как обычно считается, что необходимое число интегралов не меньше двух [2–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каплан С.А.* // Уч. зап. Львовского ун-та, *1949*, Т. 15, Вып. 4, С. 101.
2. *Fowler W.A.* // Rev. Mod. Phys., *1964*, V. 36, P. 545.
3. *Зельдович Я.Б. Новиков И.Д.* Релятивистская астрофизика, М.: Наука, *1967*, С. 654.
4. *Шапиро С., Тьюкольски С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды (Физика компактных объектов), М.: Мир, *1985*, Т. 1, С. 254.
5. *Бисноватый–Коган Г.С.* Физические основы теории звездной эволюции, М.: Наука, *1989*, Т. 1, С. 488.
6. *Чандрасекар* // УФН, *1985*, Т. 145, С. 489.