ГРАВИТАЦИЯ Том 2 Выпуск 2 1996
Журнал по дискуссионным проблемам гравитационной физики .... *стр. 71–80*

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

САМОДЕЙСТВИЕ И КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

С. Дезер*

Приводится простая единая замкнутая схема вывода нелинейностей для эйнштейновской, янг-миллсовской и бесспиновой (например, киральной) мезонной систем. В первых двух случаях нелинейности связаны с локальностью и согласованностью; во всех случаях они определяются сохраняющимися токами, связанными с исходной (линейной) калибровочной инвариантностью первого рода. Используемый формализм первого порядка единообразно приводит к простому кубическому самодействию.

Содержание

1. Введение

Максвелловское и эйнштейновское поля описываются, соответственно, наиболее и наименее линейными калибровочными теориями. Электрическая нейтральность фотона отражает отсутствие самодействия, тогда как во втором экспериментальном случае, уравнения гравитационного поля являются бесконечным рядом по метрике благодаря гравитационному «весу» гравитонов и энергии их взаимодействия. Между этими крайностями лежат теории с внутренней калибровочной симметрией, подобные полю Янга-Миллса (спин 1) и киральным лагранжианам (спин 0). Мы хотим дать простой физический вывод нелинейности этих теорий, используя теперь хорошо известный аргумент (см. например [1–6]), приводящий от линейного безмассового поля спина 2 к полным уравнениям Эйнштейна. Этот аргумент, который подчеркивает аспекты самодействия (в большей мере, чем аспекты калибровочной инвариантности), основывается на исходной линейной теории с источником поля, полученным из свободной части; в дальнейшем на каждом шаге итераций в источник подставляются решения этих уравнений и, таким образом, вводятся новые

*Университет Брандерса, Массачусетс. Перевод с оригинала: Deser S., «Self-interaction and gauge invariance», 1970, Gen. Rel. Grav., **v. 1**, p. 9–18.

нелинейные члены в действие. Различные нелинейности таким образом проявляются как специфические самодействия. Мы дадим единый вывод нелинейностей вышеупомянутых полей, основанный на использовании действия первого порядка. Все появляющиеся нелинейности будут иметь в точности кубические лагранжианы одного и того же обобщенного вида. В частности, эйнштейновские уравнения получаются (в замкнутой форме) за один шаг, а не в виде бесконечного ряда. При этом согласованность влечет универсальность взаимодействия (включая и самодействие) и, следовательно, принцип эквивалентности.

2. Метрическое поле

Эйнштейновские уравнения могут быть получены не геометрическим путем [1–6], если заметить, что для свободного безмассового поля спина 2:

$$R^L_{\mu\nu}(\varphi) - \frac{1}{2}\,R^L_{\alpha\alpha}(\varphi)\eta_{\mu\nu} \equiv G^L_{\mu\nu}(\varphi) \equiv$$
$$\equiv \Big[(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\Box + \eta_{\mu\nu}\partial^2_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}\partial^2_{\mu\nu} - \eta_{\mu\alpha}\partial^2_{\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}\partial^2_{\mu\alpha}\Big]\,\varphi_{\alpha\beta} = 0 \qquad (1)$$

— источником может являться тензор энергии-импульса (ТЭИ) вещества $T_{\mu\nu}$, который, в дальнейшем, должен быть дополнен до общего ТЭИ, включая и ТЭИ самого поля φ. Это означает, что уравнения свободного поля (1) являются корректными, однако это не выполняется в случае, когда источником становится $T_{\mu\nu}$ динамических систем. В этом случае левая часть уравнений, обладающая тождественно равной нулю дивергенцей, не соответствует правой части, поскольку $T^{\mu\nu}_{,\nu}$, вычисленная из уравнений движения вещества, уже не сохраняется. Для исправления этого[1] ТЭИ ($^2\vartheta_{\mu\nu}$), получаемый из квадратичного лагранжиана ^2L порождающего уравнение (1), подставляется в правую часть уравнений поля. Но лагранжиан ^3L, приводящий к этим модифицированным уравнениям, становится тогда кубическим и сам требует использования кубического $^3\vartheta_{\mu\nu}$. Эти приближения продолжаются бесконечно и приводят (если все проделать аккуратно!) к полным уравнениям Эйнштейна $G_{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}) = -æT_{\mu\nu}$, которые являются бесконечным рядом по отклонениям $\varphi_{\mu\nu}$ метрики $g_{\mu\nu}$ относительно метрики Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Начав первую итерацию (независимо от того присутствует или нет при этом $T_{\mu\nu}$), мы должны продолжить итерации во всех приближениях, поскольку закон сохранения выполняется только для всего ряда $\sum_2^\infty {}^n\vartheta_{\mu\nu}$. Таким образом, теория или остается в ее свободной линейной форме (1) (что физически не оправданно), или она должна рассматриваться в виде бесконечного ряда. Этот процесс подстановки $\vartheta_{\mu\nu}$ системы на каждом шаге является прототипом нашего метода: «ток» в правой части уравнений поля является таким, каким он порождается исходной постоянной калибровочной инвариантностью теории. В рассматриваем случае $\vartheta_{\mu\nu}$ являются коэффициентами локальных лоренцевых преобразований, поскольку теория инвариантна относительно группы Лоренца. Эта процедура необходима тогда и только тогда, когда существует первоначальная калибровочная инвариантность второго рода ($\delta\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$), которая предполагает точный закон сохранения для свободного поля, несмотря на то, что инвариантность фактически нарушается итерационной процедурой. Ток определяется на каждом шаге инвариантностью относительно постоянных преобразований.

Теперь мы получим полные уравнения Эйнштейна на основе тех же самосогласованных требований, но с условием, что полная теория записывается в замкнутой форме с добавлением (кубического) члена, а не в виде бесконечного ряда, и при

[1] Согласованность и линейность могут быть также совмещены, если отбросить локальность [14].

этом не требуется вводить специальную «калибровку» типа $g^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. Это становится возможным при использовании форм первого порядка, в которых метрика и аффинность априорно независимы, и в которых исходные переменные линеаризованы не по $g_{\mu\nu}$, а по $g^{\mu\nu}$ — контравариантной метрической плотности.

Мы начнем с записи полного действия Эйнштейна в первом порядке:

$$I \equiv \int d^4x\,\mathcal{R} \equiv \int d^4x\,\tilde{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \int d^4x\,\tilde{g}^{\mu\nu}[\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}], \qquad (2)$$

из которого получаются следующие уравнения поля

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}, \qquad (3a)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu,\nu} - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\alpha\nu,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} = 0, \qquad (3b)$$

где $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ — символы Кристоффеля, построенные из метрики, а $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}^{\mu\nu}$ являются независимыми. Отметим, что действие является строго кубическим в этих базовых переменных. Теория свободного безмассового поля спина 2 (в линейном приближении) может быть представлена квадратичным действием:

$$I^L \equiv \int d^4x\mathcal{R}^L = \int d^4x\,\left[h^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu,\nu}) + \eta^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma_\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu})\right] \qquad (4)$$

с уравнениями поля:

$$2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \eta^\alpha{}_\mu\Gamma_\nu - \eta^\alpha{}_\nu\Gamma_\mu = h^{\mu\nu}{}_{,\alpha} - h^{\mu\alpha}{}_{,\nu} - h^{\nu\alpha}{}_{,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\beta\beta}{}_{,\alpha}, \qquad (5a)$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\nu} - \frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\mu} = 0, \qquad (5b)$$

где $\Gamma_\mu \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$. Оно отличается от (2) только заменой $\tilde{g}^{\mu\nu}$ на $\eta^{\mu\nu}$ в кубическом члене. Так как все индексы опускаются и поднимаются с помощью $\eta^{\mu\nu}$, то нам необходимо сохранить только след симметричного $h^{\mu\nu}$ и нижние индексы у $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Дифференцирование уравнения (5a) по α приводит к линейному уравнению

$$2R^L_{\mu\nu} \equiv \Box h^{\mu\nu} - h^{\mu\alpha}{}_{,\alpha\nu} - h^{\nu\alpha}{}_{,\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h_{\alpha\alpha} = 0, \qquad (6)$$

которое эквивалентно (1) при условии, что $\varphi_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} + {}^1\!/_2\eta_{\mu\nu}h_{\alpha\alpha}$. Теперь мы потребуем, чтобы в уравнение (6) был введен источник[2]: $\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - {}^1\!/_2\eta_{\mu\nu}T_{\alpha\alpha}$, где $T_{\mu\nu}$ — это ТЭИ для линейного действия (4). Этот тензор легко вычислить обычным (Розенфельд) методом как вариационную производную I^L по вспомогательной метрической контровариантной плотности $\psi^{\mu\nu}$, записывая I^L в «общековариантной форме» по этой метрике $I^L(\eta \to \psi)$. Отметим, что при этом не предполагается введения каких-либо геометрических понятий, а используется только чисто математические сокращения для отыскания ТЭИ из I^L. Мы могли бы также получить его (эквивалентно) методом введения локальных лоренцевых преобразований (Белинфанте). Ковариантное действие получается из уравнения (4) просто заменой $\eta^{\mu\nu} \to \psi^{\mu\nu}$ и в членах типа $h\partial\Gamma$ ψ-ковариантные производные:

$$\delta I^L(\psi) \equiv \int d^4x\,\delta\psi^{\mu\nu}[(h^{\alpha\beta}\Gamma_\lambda - 2h^{\rho\beta}\Gamma^\alpha_{\rho\lambda} + h^{\rho\tau}\Gamma^\alpha_{\rho\tau}\delta^\beta_\lambda)(\delta C^\lambda_{\alpha\beta}/\delta\psi^{\mu\nu}) + (\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma_\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu})], \qquad (7)$$

[2] Работа с $R_{\mu\nu}$ эквивалентна работе с $G_{\mu\nu}$, но экономит объем вычислений, вот почему источник $\tau_{\mu\nu} \equiv \delta I/\delta\psi^{\mu\nu}$. Также мы полагаем коэффициент пропорциональности æ между R и τ равным единице, поскольку он поглощается в окончательном переопределении $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + æh^{\mu\nu}$. Конечно, æ появится снова перед натяжениями материи.

где $C^{\lambda}_{\alpha\beta}$ — символ Кристоффеля для ψ. Мы положили, что $h^{\mu\nu}$ преобразуется как контравариантная тензорная плотность, а $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ — как тензор в этом вспомогательном пространстве. Поскольку нас интересует только получение $\delta I/\delta\psi^{\mu\nu}$ при $\psi = \eta$, то необходимо вычислить вариацию $C^{\lambda}_{\alpha\beta}$, сохраняя только линейные члены $\sim \partial\psi$, и, таким образом получим,

$$\begin{gathered}\tau_{\mu\nu} \equiv \delta I^L/\delta\psi^{\mu\nu} = (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}) - \sigma_{\mu\nu}, \\ 2\sigma_{\mu\nu} \equiv \partial_{\alpha}\left[\eta_{\mu\nu}(h^{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}h^{\lambda\lambda}\Gamma_{\alpha}) + (h^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha} - h^{\mu\alpha}\Gamma_{\nu} - h^{\nu\alpha}\Gamma_{\mu}) + \right. \\ \left. + h^{\alpha\beta}(\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}) + h^{\mu\rho}(\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\rho}) + h^{\nu\rho}(\Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho})\right].\end{gathered} \tag{8}$$

Теперь мы утверждаем, что действие, которое приводит к требуемому уравнению $R^L_{\mu\nu} = -\tau_{\mu\nu}$, есть

$$I = I^L + \int d^4x h^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}). \tag{9}$$

Заметим, что мы не добавляли полный $h^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}$, а использовали только простую часть $\tau_{\mu\nu}$. Мы заметим также, что если наше утверждение правильно, то нет необходимости в итерациях, так как кубический член в (9) является фактически независимым от ψ, поскольку $h_{\mu\nu}$ — плотность. Таким образом, $\delta I/\delta\psi^{\mu\nu} = \delta I^L/\delta\psi^{\mu\nu}$, и (9) дает полную теорию, поскольку оно является эйнштейновским действием (2) при отождествлении $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$. Для того, чтобы проверить, что (9) правельно, мы определим $R^L_{\mu\nu}$ из уравнений поля (3). Последние отличаются от линейных уравнений в двух отношениях. Во-первых, членом $(\Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma)$ в (3b), который является простой частью нашего $\tau_{\mu\nu}$. А во-вторых — теперь Γ это полный символ Кристоффеля, то есть, уравнение (3a) представимо в виде[3]:

$$-h^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + (\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\Gamma_{\alpha} - (\eta^{\mu\rho} + h^{\mu\rho})\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho} - (\eta^{\nu\rho} + h^{\nu\rho})\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} = 0 \tag{10}$$

— и содержит билинейные члены $h\Gamma$, в отличие от (5a). Дифференцируя уравнение (10) по α, переставляя индексы, и разделяя линейную и квадратичную части, мы однозначно находим

$$2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu,\mu} = 2R^L_{\mu\nu} - 2\sigma_{\mu\nu} \tag{11}$$

так, что с учетом (3b), получаем желаемый результат:

$$R^L_{\mu\nu} = -\tau_{\mu\nu}. \tag{12}$$

Таким образом, благодаря использованию формы первого порядка, вместе с естественными переменными $\tilde{g}^{\mu\nu}$, в терминах которых полное действие Эйнштейна является кубическим, для получения последнего требуется только один прямой шаг. Отметим также, что обе части $\tau_{\mu\nu}$ имеют различное происхождение и в уравнениях поля и в процедуре варьирования $\delta/\delta\psi$. Член $\Gamma\Gamma$ является прямой частью $\delta I/\delta\psi$, и очевидный квадратичный вклад в уравнения с $\partial\Gamma$ приводит к кубическому члену. Часть $\sigma_{\mu\nu}$ является менее очевидной: она присутствует только для полей со спином, большим единицы, так, что кинетические члены $'p\dot{q}'$ зависят от ψ и вносят вклад в ТЭИ. Таким образом, для спина 1 соответствующий член записывается как $F^{\mu\nu}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})$, являющийся ковариантным, как и должно быть, и $f^{\mu\nu}$ — тензорная плотность, и, аналогично, имеем ковариантную форму $\pi^{\mu}\partial_{\mu}\varphi$

[3] Обычные бесконечные нелинейности уравнений Эйнштейна появляются, когда уравнения (5a) решаются для Γ, которые входят в обратную матрицу $h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}$. Отметим, что $\eta^{\mu\nu}$ гарантирует существование этой обратной матрицы на бесконечности, где $h^{\mu\nu}$, как и предполагалось (подобно любому другому току), становятся нулевыми.

для спина 0, где π^μ — также тензорная плотность. Однако, как хорошо известно, тензоры высшего порядка, в частности, симметричные тензоры второго ранга, должны иметь явные ковариантные производные. Вклад σ в уравнения поля приводит к нелинейности в соотношении Γ и h, возникающей из-за различия между Γ и его линейной частью (в h). Теперь вернемся к рассмотрению уравнений поля с веществом. Первоначально вещество как источник являлось сохраняющимся током, вследствие инвариантности системы свободного вещества относительно строгих преобразований Лоренца, а именно, $T^M_{\mu\nu}(\eta)$, и на этом шаге он не зависел от $h^{\mu\nu}$. Легко показать, что корректное взамодействие представляется в обычном минимальном виде: $I^M(\eta^{\mu\nu}) \to I^M(\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu})$: так как в правой части уравнения Эйнштейна (12) должно быть $\tau^M_{\mu\nu} \equiv \delta I^M(\eta+\psi)/\delta\psi^{\mu\nu}$ при $\psi=0$ для полного ТЭИ вещества. Но с другой стороны, при рассмотрении уравнения (12) как уравнения Эйлера-Лагранжа оно представимо в виде $\delta I^{Tot}/\delta h^{\mu\nu}=0$. Таким образом, мы получаем $\delta I^M(\psi)/\delta\psi|_0 = \delta I^M(h)/\delta h$, чье решение естественно есть $I^M = I^M(\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu})$, при условии $\eta \to \eta+\psi$.

Таким образом, последовательность подхода приводит нас к универсальному взаимодействию, которое влечет принцип эквивалентности. Исходя из этого, возникает геометрическая интерпретация ОТО, поскольку *все вещество* движется в эффективном римановом пространстве с метрикой $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}$ так, что первоначальное плоское «фоновое» пространство не является более наблюдаемым.

3. Поле Янга-Миллса

Теперь рассмотрим, в качестве примера векторной теории с внутренней симметрией, поле Янга-Миллса с SU(2)-инвариантностью [7]. Мы начнем с линейной системы триплета свободных безмассовых векторных полей с потенциалами ${A_\mu}^a$ и с полями сил $F^a_{\mu\nu}$, где $a=1,2,3$ является внутренним индексом. Действие в первом порядке

$$I_0 = -\frac{1}{2}\int d^4x \left[\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu) - \frac{1}{2}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}\right] \tag{13a}$$

приводит к уравнениям поля

$$\partial_\mu\mathbf{F}_{\mu\nu}=0, \qquad \mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu \tag{13b}$$

при независимом варьровании $\mathbf{A}_\mu$ и $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ (далее мы всюду используем векторные обозначения без изотопных индексов). Эта группа свободных абелевых калибровочных полей инвариантна относительно обычных преобразований Максвелла второго рода $\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{F}\to\mathbf{F}$, из которого следует, что $\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu}$ тождественно сохраняется. Это свойство потребует самосвязанности (для корректности при наличии источников). Его форма определяется инвариантностью относительно постоянных внутренних вращений[4]:

$$\boldsymbol{\vartheta} \to \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}$ обозначает $\mathbf{A}$ или $\mathbf{F}$. (Отсутствие такой инвариантности для реального максвелловского поля обуславливает его линейность). При этом получается сохраняющийся ток

$$\mathbf{j}_\mu(x) \equiv \delta I/\delta\partial_\mu\boldsymbol{\omega}(x) = g\mathbf{F}_{\mu\nu}\times\mathbf{A}_\nu, \tag{15}$$

[4] Если мы используем ток, соответствующий вращениям только относительно какого-либо одного направления, то теория, получающаяся в этом случае, будет действительно непоследовательной [8], поэтому должна быть использована полная симметрия.

где переменные калибровочные преобразования $\omega(x)$ вводятся как подходящий способ получения тока, согласно теореме Нетер. Если теперь добавить квадратичное действие I_0 с самосвязанным членом $\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{A}_\mu$, который сохраняет инвариантность при постоянном вращении, мы получим

$$I = I_0 + \int d^4x \mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{A}_\mu = I_0 + \frac{1}{2}\, g \int d^4x \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \times \mathbf{A}_\nu \tag{16}$$

с уравнениями поля:

$$\begin{gathered} \mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu, \\ \partial_\nu \mathbf{F}_{\mu\nu} = +g\mathbf{F}_{\mu\nu} \times \mathbf{A}_\nu = \mathbf{j}_\mu. \end{gathered} \tag{17}$$

Как и при рассмотрении общерелятивистского случая, добавление такого общего кубического члена в уравнение (16) приводит к замкнутой теории без дальнейших итераций. Это можно показать двумя различными способами: самодействие $\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}\times\mathbf{A}$ не включает полных производных и, следовательно, не вносит следующего вклада в $\mathbf{j}_\mu$, определенного уравнением (15). С другой стороны, для $\mathbf{j}_\mu$, определенного в (15), всегда выполняется закон сохранения вследствие полных уравнений (17):

$$\partial_\nu \mathbf{j}_\mu = g(\mathbf{F}_{\mu\nu,\mu} \times \mathbf{A}_\nu + \mathbf{F}_{\mu\nu} \times \mathbf{A}_{\nu,\mu}) = 0. \tag{18}$$

Действие (16) является полным действием Янга-Миллса в первом порядке. Оно инвариантно относительно расширенной группы калибровочных преобразований второго рода, хотя это первоначально и не требовалось (как в случае общековариантной инвариантности полных уравнений Эйнштейна). Это — основное отличие между представленным подходом и подходом, изложенным в работе [9], который основан на требовании расширенной инвариантности.

Указанное выше происхождение нелинейностей представляет теорию Янга-Миллса как теорию, в которой рассмотрение изотропного тока $\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}$ как источника является предпочтительнее линейного выражения $\partial_\mu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)$. Действительно, они отличаются членом $\partial_\mu(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)$, который строго сохраняется, но не получается из калибрововочной инвариантности. Это является точным аналогом эйнштейновской ситуации, где $\tau_{\mu\nu}$ был источником для $R^L_{\mu\nu}(h)$, а не для $\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu,\nu}$ (что не сохраняется).

Если мы начнем рассмотрение формализма второго порядка, то

$$I_0 = -\frac{1}{4} \int d^4x\, (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2, \tag{19}$$

и его инвариантность относительно $\delta\mathbf{A} = \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}$ порождает ток

$${}^1\mathbf{j}_\mu = g\mathbf{A}_\nu \times (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu). \tag{20}$$

Можно ожидать появления добавки к действию

$$I_1 = \frac{1}{2} \int d^4x\, {}^1\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} g \int d^4x\, \mathbf{A}_\mu \cdot (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) \times \mathbf{A}_\nu. \tag{21}$$

Поскольку уравнение (21) включает явно полные производные, оно должно порождать ток следующего приближения:

$${}^2\mathbf{j}_\mu = g^2(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu) \times \mathbf{A}_\nu, \qquad I_2 = \frac{1}{4}\, g^2 \int d^4x\, (\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2, \tag{22}$$

в котором уже не осталось производных. Общее действие является известной формой второго порядка теории Янга-Миллса:

$$I = I_0 + I_1 + I_2 = -\frac{1}{4}\int d^4x\, \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}, \qquad \mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{D}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{D}_\nu \mathbf{A}_\mu \tag{23}$$

в терминах ковариантных производных $\mathbf{D}_\mu \equiv (\partial_\mu - {}^1\!/_2 g\mathbf{A}_\mu \times)$.

Окончательные кубическая (16) и квадратичная (23) формы являются, конечно, эквивалентными. Однако, процедура, приводящая к этому выводу, не соответствует исходному постулату о самодействии, поскольку вариация первой итерации (21) не приводит к уравнениям поля с ${}^1\mathbf{j}_\mu$ в качестве источника, но содержит ранее упоминавшийся дополнительный член $\partial_\nu(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)$.

Аналогично эйнштейновскому случаю, закон сохранения тока допускает, но не требует самодействия в отсутствие источников. Однако, как и в эйнштейновском случае, оно необходимо только в единственно интересной ситуации, когда динамический ток J_μ взаимодействует с полем. Например, для фермионного поля $\mathbf{\Psi}$, его ток $\mathbf{J}_\mu \equiv g\bar{\psi}\gamma_\mu\tau\psi$ *не* будет сохраняться вследствие уравнений Дирака, а должен подчиняться закону «ковариантного сохранения» и, таким образом, не может быть последовательно связан с *линейной* теорией ($\partial^2_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} \equiv 0$), несмотря на то, что $\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}$ — инвариант вращения. При этом необходимо ввести самодействие, то есть, поперечность уравнений поля по отношению к *ковариантному* дифференцированию ($\mathbf{D}_\mu\mathbf{D}_\nu\mathbf{F}^{\mu\nu} = 0$). Наш подход, конечно, не применим к массивному векторному полю потому, что массивный член всегда может включить в себя несохраняющуюся часть тока, без необходимости в нелинейных членах, согласно равенству $M^2\mathbf{A}^\nu{}_{,\nu} = \mathbf{J}^\nu{}_{,\nu} \sim \mathbf{J}_\nu \times \mathbf{A}_\nu$. Однако можно вполне последовательно проделать итерации и получить вариант теории Янга-Миллса для массивного поля.

4. Системы со спином нуль

В отличие от ситуации для тензорных и векторных полей, нелинейная теория для бесспиновых частиц не является обязательной, потому что, как мы увидим, нет конфликта между несохранением внешнего тока и уравнениями для свободного поля. Однако, тем не менее, можно выполнить аналогичную процедуру и утверждать, что источник поля является полным током, включая и ток самого безмассового поля. Мы разберем здесь один пример[5], который приводит к теории токов Сугавары [11, 12].

Вместо того, чтобы получать киральный лагранжиан для того или иного конкретного представления нулевого спина, которое соответствовало бы выводу нелинейностей эйнштейновской теории в конкретной калибровке, мы получим его в общем виде. Для этого рассмотрим квадратичное действие

$$I_0 = -\frac{1}{2}\int d^4x\, [\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) + c\mathbf{A}_\mu{}^2], \tag{24}$$

которое описывает триплет чисто продольных свободных безмассовых полей с уравнениями поля:

$$\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu = 0, \tag{25a}$$

$$\partial_\mu \mathbf{A}_\mu = 0. \tag{25b}$$

[5] Простейший пример спина нуль — «скалярный гравитон», появляющийся в случае, когда отдельное скалярное поле порождается следом ТЭИ, рассмотрен в форме второго порядка в [13] и [10]. Более позднее сообщение посвящено теории Нордстрема.

Это — абелевый предел теории Сугавара, и он эквивалентен триплету свободного безмассового скалярного поля [так как уравнение (25a) подразумевает, что $\mathbf{A}_\mu = \partial_\mu \mathbf{\Phi}$, и уравнение (25b) приводит к $\Box\mathbf{\Phi} = 0$]. Если мы теперь добавим член с током $I_1 \sim \int A \cdot F \times A$, как и в случае поля Янга-Миллса (поскольку иинвариантность та же), мы получим

$$I = I_0 + I_1 = -\frac{1}{2} \int d^4x \, [\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot (\mathbf{D}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{D}_\nu \mathbf{A}_\mu) + c\mathbf{A}_\mu{}^2], \tag{26}$$

где $\mathbf{D}_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{1}{2} g \mathbf{A}_\mu \times$.

Данное действие уже было рассмотрено в работе (13), где было показано, что оно есть лагранжев формализм для модели Сугавара (с прямым расширением до группы SU(2)×SU(2)). Это ясно из того, что получающиеся уравнения поля являются стандартными

$$\mathbf{D}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{D}_\nu \mathbf{A}_\mu \equiv \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu = 0, \tag{27a}$$

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0, \tag{27b}$$

и что одновременные коммутаторы также идентичны. Действие опять является только кубическим, хотя оно становится бесконечным рядом, когда выражается в терминах пионного поля нулевого спина в той или в иной нелинейной реализации уравнений поля, соответствующей выбору основного пионного поля π, представляющего решение уравнения (27a). Таким же образом можно попытаться начать со скалярного представления

$$I_0 = -\int d^4x \left[\boldsymbol{\pi}^\mu \cdot \mathbf{\Phi}_\mu - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 \right] \tag{28}$$

триплета безмассовых спинов, используя инвариантность относительно $\partial\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}$, $\partial\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}'$ [см. Приложение B]. Однако этот подход значительно более сложен, чем независимый от представления указанный выше подход, и самосогласованность уравнений поля не выполняется непосредственно на каждом шаге. Отметим, что здесь нет необходимости добавлять нелинейный член, поскольку исходные уравнения поля при внешнем токе $\mathbf{J}_\mu$ (включая $\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$):

$$0 = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu, \qquad \partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = c\mathbf{A}_\nu + \mathbf{J}_\nu \tag{29}$$

— допускают несохраняющийся ток $\mathbf{J}_\mu$ с $\partial\mathbf{A} \sim \Box\boldsymbol{\varphi} \sim \partial\mathbf{J}$, как в теории массивного векторного поля. В отличие от поперечного поля Янга-Миллса, это чисто продольное калибровочное поле не обладает внутренней калибровочной инвариантностью $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \partial\mathbf{\Lambda}$, которая в том случае требовала нелинейности. Однако, естественно добавить кубический член так, чтобы ковариантные производные входили всюду.

Приложение A

Здесь мы укажем на любопытный «геометрический вывод» эйнштейновских или янг-миллсовских уравнений, который однако менее убедителен, чем вывод в тексте. Рассмотрим уравнение свободного поля спина 2 выраженное в переменных $\gamma^\mu_{\alpha\beta}, \varphi_{\mu\nu}$ (где $\varphi_{\mu\nu}$ являются в конечном счете разностью $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$). Тогда уравнения поля запишутся:

$$2\gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \gamma_{\mu,\nu} - \gamma_{\nu,\mu} = 0, \quad \gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \eta^{\alpha\beta} [\varphi_{\beta\mu,\nu} + \varphi_{\beta\nu,\mu} - \varphi_{\mu\nu,\beta}]. \tag{A.1}$$

В фоновом метрическом пространстве они будут иметь такую же форму, но с заменой всех производных на ковариантные производные в этом фоновом пространстве и с заменой $\eta \to g$. Теперь мы определим γ и φ как малые вариации фоновых Γ и g. Тогда эти ковариантные уравнения «интегрируются» в обычные эйнштейновские уравнения (3) при использовании тождества Палатини

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - \frac{1}{2}(\delta\Gamma_{\mu})_{;\nu} - \frac{1}{2}(\delta\Gamma_{\nu})_{;\mu}$$

вместе с очевидными соотношениями для $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и при учете того, что $\delta\Gamma$, в отличие от самого Γ, является тензором. В частности, уравнение (A.1), таким образом, представляет малые осцилляции эйнштейновского поля около плоского пространства или по отношению к локальной инерциальной системе, где $\Gamma = 0$ и $g = \eta$. Также мы могли бы начать с уравнений в «плоском пространстве» (13b) в терминах малых осцилляций $\mathbf{f}_{\mu\nu}$, $\mathbf{a}_{\nu}$ которые, в присутствие внешнего поля $\mathbf{A}_{\mu}$, принимают «минимальную» форму, с заменой $\partial_{\mu} \to (\partial_{\mu} - g\mathbf{A}_{\mu}\times)$. Определяя $\mathbf{j} = \delta(\mathbf{F})$, $\mathbf{a} = \delta(\mathbf{A})$ и интегрируя, получаем полные уравнения Янга-Миллса (17). В гравитационном случае это рассмотрение усиливается тем, что уравнения для безмассового поля спина 2 в искривленном пространстве являются, в общем случае, непоследовательными [15]; таким образом, только отождествление $\varphi, \gamma \to \delta(g), \delta(\Gamma)$ является логичным.

Приложение B

Мы описываем здесь результат итерационного процесса на примере триплета безмассовых бесспиновых частиц, начиная со скалярного представления — векторное представление разобрано в самом тексте статьи. Исходное действие

$$I_0 = -\int d^4x \left[\boldsymbol{\pi}^{\mu} \cdot \partial_{\mu}\boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2\right] \qquad (B.1)$$

является инвариантом относительно изотопического вращения в $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Phi})$, а также трансляций $\boldsymbol{\Phi}$. Одно только изотопическое вращение приводит к итеративным токам и к лагранжиану самодействия в форме

$$j^{\mu}_n = \lambda^n(\pi^{\mu} \times \varphi) \times \varphi ... \times \varphi, \quad L_n = \lambda^n(\pi^{\mu} \times \varphi) \times \varphi ... \times \varphi_{,\mu}. \qquad (B.2)$$

Используя тождества векторного произведения, получаем

$$I = -\int d^4x \left[\boldsymbol{\pi}^{\mu} \cdot [\mathbf{1} + \lambda^2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi} + \times\lambda\boldsymbol{\Phi}] \cdot \boldsymbol{\Phi}_{,\mu}(1 + \lambda^2\boldsymbol{\Phi}^2)^{-1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2\right], \qquad (\mathrm{B.3a})$$

$$j_{\mu} = \lambda(1 + \lambda^2\boldsymbol{\Phi}^2)^{-1}\left[\boldsymbol{\pi}^{\mu} \times \boldsymbol{\Phi} + \lambda(1 + \lambda^2)^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^2 \cdot \mathbf{1}) \cdot \ PI\right]. \qquad (\mathrm{B.3b})$$

Для перехода к более знакомой форме второго порядка, мы используем легко выводимое соотношение между действиями первого и второго порядков

$$I = -\int [\pi^{\mu} \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\Phi}) \cdot \partial_{\mu}\boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2] \leftrightarrow I = -\frac{1}{2}\int \varphi_{,\mu} \cdot \mathbf{P}^2(\varphi) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{,\mu} \qquad (B.4)$$

для симметричных диад $\mathbf{P}(\boldsymbol{\Phi})$. Тогда (B.3) преобразуются в

$$I = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\Phi}_{\mu} \cdot (\mathbf{1} + \lambda^2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{,\mu}(1 + \lambda^2\boldsymbol{\Phi}^2)^{-1}, \qquad (\mathrm{B.5a})$$

$$j_{\mu} = \lambda\boldsymbol{\Phi}_{\mu} \times \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1} + \lambda^2\boldsymbol{\Phi}^2)^{-1}. \qquad (\mathrm{B.5b})$$

Сохраняющийся ток (B.5b) в точности является изотопической частью обычного кирального тока в представлении

$$\mathbf{j}_{\mu}{}^{c} = [\mathbf{\Phi}_{,\mu} + \lambda\mathbf{\Phi}\times\mathbf{\Phi}_{,\mu}](\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}^2)^{-1}. \qquad (B.6)$$

Часть $\partial_\mu\mathbf{\Phi}$ может быть получена введением исходного σ поля и итерациями от комбинированной исходной киральной инвариантности[6].

Если мы рассматриваем комбинацию вращения и трансляции уравнения (B.1) с $\delta\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\times\boldsymbol{\omega} + \lambda^{-1}\boldsymbol{\omega}$ (которая является не совсем киральной формой), то получаем

$$\mathbf{j}_{\mu}{}^{n} = \boldsymbol{\pi}^{\mu}(\times\lambda\mathbf{\Phi}+\mathbf{1})^{n}, \quad L_n = \mathbf{j}_{\mu}{}^{n}\cdot\mathbf{\Phi}_{\mu}. \qquad (B.7)$$

Используя тождество

$$\sum_0^\infty(\times\lambda\mathbf{\Phi}+\mathbf{1})^n = (\times\lambda\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Phi})^{-1} = -(\times\lambda\mathbf{\Phi}+\mathbf{1})(\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi})(1+\lambda^2\mathbf{\Phi}^2)^{-1}, \qquad (B.8)$$

окончательно приходим к

$$I = \int\left[+\boldsymbol{\pi}^{\mu}\cdot(\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi})\cdot\mathbf{\Phi}_{\mu} - \lambda\boldsymbol{\pi}^{\mu}\times\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_{\mu}\right]\left[(1+\lambda^2\mathbf{\Phi}^2)^{-1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2\right] \qquad (B.9)$$

Во втором порядке получаем

$$I = -\frac{1}{2}\int\mathbf{\Phi}_{,\mu}\cdot(\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{\Phi}_{,\mu}\cdot(1+\lambda^2\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^2)^{-1}, \qquad (\mathrm{B.10a})$$

$$\mathbf{j}^{\mu} = [\lambda\mathbf{\Phi}\times\mathbf{\Phi}_{,\mu} + \mathbf{\Phi}_{,\mu}\cdot(\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi})](1+\lambda^2\mathbf{\Phi}^2)^{-1}, \qquad (\mathrm{B.10b})$$

с $I = -{}^1\!/_2\int\mathbf{j}_\mu\times\mathbf{j}_\mu$. Выше рассмотренный ток отличается от обычного кирального тока коэффициентом $(\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi})$, а точнее дополнительным членом $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}$ в уравнении (B.10b). Лагранжиан $\mathbf{j}_{\mu}{}^{c}\cdot\mathbf{j}_{\mu}{}^{c}$ также отличается от (B.10a) дополнительным знаменателем $(\mathbf{1}+\lambda^2\mathbf{\Phi}^2)^{-1}$ в $(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_\mu)^2$ члене. Таким образом эта модель является «динамической теорией токов», отличающейся (в коммутаторах тока) от модели Сугавара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kraichnan R. (1955).* Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1947; and Physical Review, **98**, 1118.
2. *Papapetrou A. (1948).* Proceedings of the Royal Irish Academy, **52A**, 11.
3. *Gupta S.N. (1952).* Proceedings of the Physical Society of London, **A65**, 608.
4. *Feynman R.P. (1956).* Chapel Hill Conference.
5. *Thirring W. (1959).* Fortschritte der Physik, **7**, 79.
6. *Halpern L. (1963).* Bulletin de l'Academie r. de Belgique. Classe des sciences, **49**, 226.
7. *Yang C.N., Mills R.L. (1954).* Physical Review, **96**, 191.
8. *Arnowitt R., Deser S. (1963).* Nuclear Physics, **49**, 133.
9. *Utiyama R. (1956).* Physical Review, **101**, 1597.
10. *Freund P.G.O., Nambu Y. (1968).* Physical Review, **174**, 1741.
11. *Sugawara H. (1968).* Physical Review, **170**, 1659.
12. *Sommerfield C.M. (1968).* Physical Review, **176**, 2019.
13. *Deser S. (1969).* Physical Review, **187**, 1931.

[6] Мы могли также начать с двух триплетов в (B.1), которые соответствовали бы SU(2)×SU(2) исходной форме Сугавара, а именно, с суммы двух действий в форме уравнения (24).