

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ***Р.П. Фейнман**

Моим предметом является квантовая теория гравитации, и меня, главным образом, интересует то, как различные части физической реальности соотносятся друг с другом. В любой работе по гравитации содержится известная доля иррациональности, и, зачастую, бывает трудно обосновать, почему вы этой работой занимаетесь. Например, поскольку здесь затрагиваются квантовые эффекты, рассмотрим влияние гравитационного притяжения между электроном и протоном в атоме водорода; оно слегка изменяет энергию. Изменение энергии квантовой системы означает то, что фаза волновой функции медленно смещается по отношению к невозмущенному состоянию. Эффект гравитационного взаимодействия в атоме водорода дает смещение фазы на 43 секунды за период, составляющий сто возрастов Вселенной! Атом, построенный исключительно на гравитации, например, состоящий из двух нейтронов, связанных гравитационным притяжением, имел бы боровский радиус 10^8 световых лет и энергию 10^{-70} ридберг. Можно подискутировать о вычислении лэмбовского сдвига такой системы, т. е. величины энергии порядка 10^{-120} . Эта иррациональность видна в странных опусах проф. Вебера, в абсурдных творениях проф. Уиллера и в им подобных, — ведь эти величины столь необычны. Ясно, что стоящая перед нами проблема поставлена некорректно; правильным был бы вопрос: что определяет величину гравитационного взаимодействия? Поскольку я тоже принадлежу к кругу «неразумных» людей, я надеюсь, что меня не будут сильно критиковать за подобные, не имеющие практического значения расчеты.

Я не буду здесь обсуждать ни вопросы квантовой геометрии, ни то, что происходит в случае полей с очень короткими длинами волн. Я не собираюсь рассматривать никакие проблемы, с которыми мы еще не сталкивались в современной квантовой теории других полей, не потому, что я полагаю, что гравитация не может быть полезной для их решения, но исключительно для ограничения предмета. Я полагаю, что нет длин волн короче одной миллионной комптоновской длины волны протона и, следовательно, весь анализ можно проводить в рамках теории возмущений; я буду применять приближения теории возмущений везде, где это возможно, во всех приложениях, так что мы будем иметь столько членов разложения, сколько пожела-

*Стенограмма лекции. Перевод с оригинала: Feynman R., «Quantum theory of gravitation», 1963, Acta Phys. Pol. vol. XXIV, p. 697–722.

ем, и получим возможность подойти к величинам порядка десять в минус двухсотой с копейками степени ридберг.

Я исследую этот предмет несмотря на серьезную трудность, связанную с отсутствием экспериментов. Это заставляет рассчитывать истинные, физические ситуации. И вот воображаю, что такие эксперименты были проведены, много экспериментов, и что гравитационная константа вполне аналогична электродинамической, что они согласуются с данными по различным гравитационным атомам и т. д., и что расчеты нужны для проверки соответствия теории этим данным. В каждом случае я решаю конкретную физическую задачу; вопросы о том, что происходит в квантованной метрике, как определяется тензор энергии и т. п. рассматриваются в той мере, в какой это необходимо для решения физической проблемы, так что, я надеюсь, вы не осудите меня за подход к проблеме в виде рассмотрения последовательности физических задач все возрастающей сложности. Если я справляюсь с одной, я перехожу к другой, более сложной, ставя воображаемых экспериментаторов во все более сложные условия. Я решил также не исследовать то, что я бы назвал знакомыми трудностями. Квантовая электродинамика содержит расходимости; само по себе это не является предметом анализа и в этой теории, за исключением случаев, когда это приводит к специфическим трудностям, связанным с гравитацией. Короче говоря, я сосредотачиваюсь исключительно на нетрадиционных (для мезонной физики) проблемах и трудностях. Например, сразу ясно, что теория является нелинейной. Эта трудность не является ни новой, ни неожиданной; например, теория взаимодействия частиц со спином $1/2$ с электромагнитным полем содержит член взаимодействия $\bar{\psi}A\psi$, включающий три поля и, соответственно, являющийся нелинейным. Теперь, я думаю, будет довольно легко продвигаться вперед в соответствии со следующим планом. Я начал с эйнштейновского лагранжиана для гравитационного поля и должен был ввести определение для вещества, т. к. я рассматривал реальные физические тела и должен был принять то или иное решение относительно их состава, и затем я должен был проверить, зависят ли полученные результаты от моего выбора, или они содержат нечто большее. Единновременно я могу рассматривать лишь один пример; я взял материю с нулевым спином; далее, поскольку я собираюсь развивать теорию возмущений, как это делается в квантовой электродинамике (причем для гравитации ее применимость выглядит более обоснованной ввиду малости константы взаимодействия), я записываю $g_{\mu\nu}$ как плоское пространство, как если бы не было никакой гравитации, с добавлением \varkappa , умноженной на $h_{\mu\nu}$, где \varkappa — это корень квадратный из гравитационной постоянной. После подстановки в лагранжиан мы получаем кучу-малу, приведенную ниже:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\varkappa^2} \int R\sqrt{g} d\tau + \frac{1}{2} \int (\sqrt{g}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - m^2\sqrt{g}\varphi^2) d\tau, \quad (1)$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varkappa h_{\mu\nu}.$$

Подставляя, раскладывая и применяя упрощенную запись (черта над тензором означает

$$\bar{x}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(x_{\mu\nu} + x_{\nu\mu} - \delta_{\mu\nu}x_{\sigma\sigma});$$

причем для симметричного тензора $x_{\mu\nu}$ имеет место $\bar{\bar{x}}_{\mu\nu} = x_{\mu\nu}$), мы приходим к:

$$\mathcal{L} = \int (h_{\mu\nu,\sigma}\bar{h}_{\mu\nu,\sigma} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\sigma}\bar{h}_{\mu\sigma,\sigma}) + \frac{1}{2} \int (\varphi_{,\mu}^2 - m^2\varphi^2) d\tau +$$

$$+ \varkappa \int (\bar{h}_{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - m^2\frac{1}{2}h_{\sigma\sigma}\varphi^2) + \varkappa \int \langle hhh \rangle + \varkappa^2 \int \langle hh\varphi\varphi \rangle + \text{и т. д.} \quad (2)$$

Разложение начинается с членов, квадратичных по h ; затем идут члены, квадратичные по φ — переменной мезонного поля с нулевым спином; далее присутствуют

члены более сложной структуры, например, член с двумя φ и одним h , который я буду писать как $h\varphi\varphi$ (я расписал его подробно); есть члены с тремя h , а также содержащие два h и два φ , и так далее, со все возрастающей сложностью. Первые два члена представляют свободный лагранжиан гравитационного поля и вещества.

Теперь посмотрим на проблему так, как если бы мы хотели решать ее классическим путем. Берем вариацию лагранжиана по h , из первого члена образуем определенную комбинацию вторых производных, а правую часть формируем из членов более высоких порядков. Прделаем то же самое по φ , получаем:

$$h_{\mu\nu,\sigma\sigma} - \bar{h}_{\sigma\nu,\sigma\mu} - \bar{h}_{\sigma\mu,\sigma\nu} = \bar{S}_{\mu\nu}(h, \varphi), \quad (3)$$

$$\varphi_{,\sigma\sigma} - m^2\varphi = \chi(\varphi, h). \quad (4)$$

Будем говорить, что (3) это волновое уравнение, в котором $S_{\mu\nu}$ является источником, так же как (4) это волновое уравнение с источником χ . Задача состоит в их последовательном решении с использованием обычных вычислительных методов квантовой теории. Так как я стремлюсь свести трудности к минимуму, я предполагаю двигаться тем же путем, что и в электродинамике, а он приводит здесь к следующему утверждению: если у вас есть источник, вы делите его выражение на оператор левой части (3) в импульсном пространстве, чтобы получить пропагатор поля. Таким образом, я должен решить уравнение (3). Но, как вам всем известно, оно является сингулярным. Весь лагранжиан в начале был инвариантным относительно сложных преобразований g , что относительно h , означает следующее: вся система остается инвариантной, если вы добавляете к h градиент

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\xi_{\mu,\nu} + 2h_{\mu\sigma}\xi_{\sigma,\nu} + \xi_{\sigma}h_{\mu\nu,\sigma}, \quad (5)$$

где ξ_{μ} произвольны, а μ и ν должны быть симметризованы во всех уравнениях. Можно показать, что следствием этой инвариантности полного лагранжиана является бездивергентность источника $S_{\mu\nu,\nu} = 0$. В действительности, уравнение (3) не имело бы места без этого условия, что видно если провести операции «надчеркивания» обеих частей и взятия дивергенции — левая часть обращается в нуль тождественно. Теперь, в силу инвариантности уравнений, они не могут дать единственного решения для пропагатора, подобно тому как уравнения Максвелла не дают единственного решения для векторного потенциала. Опять же в силу инвариантности при этом преобразовании можно наложить произвольные условия на $h_{\mu\nu}$, аналогичные лоренцевским условиям $A_{\mu,\mu} = 0$ в квантовой электродинамике. Простейший из известных мне вариантов выбора этих условий есть $\bar{h}_{\mu\sigma,\sigma} = 0$. Это дает четыре условия, и у меня есть четыре переменных ξ_{ν} , которыми я могу управлять, чтобы удовлетворить этому условию для $h'_{\mu\nu}$. Тогда уравнение (3) сильно упрощается, т. к. два члена выпадают и остается только даламбертиан от h , равный S . Тогда фурье-образ поля, порождаемого источником $S_{\mu\nu}$, будет равен $\bar{S}_{\mu\nu}$ умноженному на $1/k^2$, где k^2 — квадрат 4-волнового вектора; временная его часть может быть названа частотой ω , а пространственная \mathbf{k} . Это аналог электродинамического решения, согласно которому поле есть произведение $1/k^2$ на ток. Согласно методам квантовой теории поля мы имеем источник, генерирующий нечто, это нечто может затем взаимодействовать с чем-то еще (взаимодействие, конечно, описывается произведением $S_{\mu\nu}h_{\mu\nu}$), так что можно сказать, что источник создает потенциал, взаимодействующий с другим источником. Так, в простейшем примере двух взаимодействующих систем, S и S' , h генерируется $S_{\mu\nu}$ и затем взаимодействует с $S'_{\mu\nu}$ так, что мы получаем для взаимодействия двух систем, изучаемого нами:

$$\mathfrak{a}^2 \bar{S}_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} S'_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Этот член представляет закон гравитационного взаимодействия, выраженный в терминах обмена виртуальными гравитонами. Для понимания теории и оценки того, насколько далеко мы продвинулись, мы разложим (6) по компонентам. Пусть индекс 4 представляет время, 3 — направление \mathbf{k} а 1 и 2 — поперечные направления. Условие $k_\mu S_{\mu\nu} = 0$ в этих обозначениях выглядит как $\omega S_{4\nu} = k S_{3\nu}$, где k это модуль \mathbf{k} . С использованием этого соотношения, в членах, содержащих компоненты S с индексом 3, может быть произведена замена на компоненты с индексом 4. После некоторой перегруппировки это дает:

$$-2\bar{S}_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} S_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} [S_{44} S'_{44}] + \frac{1}{k^2} [S_{44} S'_{11} + S'_{22} + S'_{44} (S_{11} + S_{22}) + S_{43} S'_{43} - 4S_{41} S'_{41} - 4S_{42} S'_{42}] + \frac{1}{k^2 - \omega^2 + i\varepsilon} [(S_{11} - S_{22})(S'_{11} - S'_{22}) + 4S_{12} S'_{12}]. \quad (7)$$

В последнем члене содержится сингулярность при $\omega = k$, и для корректности мы добавили в знаменатель величину $+i\varepsilon$, как это делается в электродинамике. Вы видите, что в первых двух членах содержится квадрат модуля импульса $1/k^2$, а не 4-квадрат $\omega^2 - k^2$. S_{44} — есть плотность энергии, и, таким образом, первый член представляет взаимодействие двух плотностей энергии без зависимости от ω , что означает мгновенное взаимодействие, а $1/k^2$ дает $1/r$ в пространственном представлении, так что имеет место мгновенное $1/r$ взаимодействие масс, т. е. закон Ньютона. В следующем члене содержится другое мгновенное взаимодействие, соответствующее поправке к закону Ньютона, аналогичной магнитному взаимодействию (хотя аналогия не является полной, т. к. в электродинамике магнитное взаимодействие уже содержит пропагатор $k^2 - \omega^2 + i\varepsilon$, отличный от k^2 . В гравитационной теории $k^2 - \omega^2 + i\varepsilon$ появляется позднее и является очень малой величиной, содержащей скорости в четвертой степени). Так что, если мы действительно хотим описывать гравитационные «атомы» это будет совсем просто; мы возьмем первый и, возможно, второй члены взаимодействия. Будучи мгновенным, этот потенциал может быть непосредственно подставлен в уравнение Шредингера, подобно члену e^2/r для электрического взаимодействия. И это обеспечивает описание гравитации с очень высокой точностью, без квантовой теории поля вовсе. Однако для еще более высокой точности нам понадобятся радиационные поправки, получаемые из последнего члена.

Излучение свободных гравитонов соответствует наличию полюса в пропагаторе. Последний член содержит полюс $\omega = k$, что дает соотношение между частотой и волновым числом, соответствующее безмассовым частицам. Вычет этого полюса представляет собой произведение двух членов, что означает наличие двух типов волн: один порождается $S_{11} - S_{22}$ а другой — S_{12} , т. е., мы имеем две поперечных поляризации гравитонов. Линейная комбинация $S_{11} - S_{22} \pm 2iS_{12}$ меняется с углом поворота Θ в плоскости 1–2 как $e^{\pm 2i\Theta}$, поэтому гравитон имеет спин 2 с проекциями ± 2 вдоль направлений поляризации. Все ясно прямо из выражения (7), я лишь хотел проиллюстрировать, что квантово-механический пропагатор (6) находится в полном соответствии с классическим описанием.

Для того чтобы двигаться дальше и проделать вычисления методом диаграмм, наряду с пропагатором нам необходимо знать, что такое соединения, или, иными словами, какие S относятся к конкретной задаче, и я сейчас покажу, как это делается в нашем примере. Для этого рассмотрим неквадратичные члены в лагранжиане (2), один из которых я выписал полностью. Он содержит \hbar и два φ . φ соответствуют приходящей и уходящей частицам, а \hbar соответствует гравитону; и мы сразу же видим в этом члене взаимодействие двух частиц посредством гравитона (рис. 1).

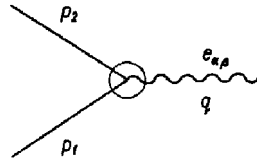


Рис. 1.

Из него сразу можно получить результат взаимодействия: если p_1 и p_2 — это импульсы частиц, а q — импульс гравитона, и $e_{\alpha\beta}$ — тензор поляризации плоской волны, представляющей гравитон, т. е., $h_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} e^{iq \cdot x}$, то Фурье разложение этого члена дает амплитуду взаимодействия двух частиц с гравитоном:

$$p_\mu^1 p_\nu^2 \bar{e}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 e_{\sigma\sigma}. \tag{8}$$

Это — взаимодействие вещества и гравитации в первом порядке; существуют и члены более высоких порядков, но я хочу сказать, что все, что надо записывать, ясно вытекает из лагранжиана и не содержит никакой тайны. У нас есть пропагатор, мы имеем взаимодействие, мы можем все записать. Член hhh дает определенную формулу взаимодействия трех гравитонов, она очень сложна, и я не буду ее выписывать, но вы можете написать ее прямо, подставляя импульсы на места градиентов. То, что этот член существует, является естественным, потому что гравитация взаимодействует с любыми видами энергии, включая саму себя, и, взаимодействуя с частицами, она взаимодействует и с гравитонами, т. е. должно иметь место рассеяние гравитонов в гравитационном поле. Так что все непосредственно прочитывается из диаграмм, и все, что нам остается, — это поиски физического смысла. Я уже указывал, что физика прямых взаимодействий является осмысленной, и я собираюсь пойти дальше и рассчитать ряд других эффектов.

Для примера рассмотрим эффект Комптона, или его гравитационный аналог, когда гравитон рассеивается на частице. Амплитуда определяется суммой членов, соответствующих диаграммам на рис. 2. Амплитуда первой диаграммы на рис. 2 есть (8), умноженное на пропагатор промежуточного состояния $(p^2 - m^2)^{-1}$, являющегося фурье-образом уравнения (4), описывающего распространение частиц с нулевым спином. Беря другое взаимодействие такого же типа как и (8), и перемножая, получаем амплитуду диаграммы

$$\left(p_\mu^2 p_\nu^1 u \bar{e}_{\mu\nu}^b m^2 - \frac{1}{2} \bar{e}_{\mu\mu} m^2 \right) \frac{1}{p^2 - m^2} \left(p_\sigma p_\tau^1 e_{\sigma\tau}^a - \frac{1}{2} \bar{e}_{\sigma\sigma} m^2 \right),$$

где нужно подставить $p = p^2 + q^b = p^1 + q^a$. Затем надо добавить аналогичные вклады от других диаграмм.

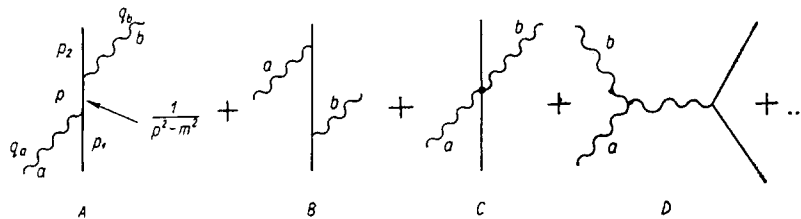


Рис. 2.

Третья диаграмма соответствует членам с двумя h и двумя φ в лагранжиане. Суммируя четыре диаграммы, получаем ответ для эффекта Комптона. Это доволь-

но просто, достаточно интересно, интересно именно то, что это просто, потому что обычно это требует фантастических усилий.

Я хочу подчеркнуть следующий вопрос: в этой задаче мы использовали определенную волну для приходящего гравитона, номер « a », например, можем ли мы использовать другую? Согласно теории она на самом деле должна быть инвариантна относительно координатных преобразований и т.п., но что имеет значение в нашем случае, — это аналог калибровочной инвариантности, заключающейся в том, что к потенциалу всегда можно прибавить полный градиент (см. (5)). И поэтому физика не изменится, если $e_{\alpha\beta}$ определенного гравитона заменить на $e_{\alpha\beta} + q_\alpha \xi_\beta$, где ξ произвольны, а q_α — его импульс. Амплитуда данного процесса не должна измениться; я называю ее калибровочно-инвариантной или инвариантной относительно координатных преобразований. На первый взгляд это кажется удивительным, можно было бы ожидать, что инвариантный закон для всей системы должен быть более сложным, включая последние два члена в (5), которые я, казалось бы, опустил. Но эти члены были включены; в асимптотике нужно беспокоиться лишь о втором члене, последние два, содержащие произведения \hbar на ξ в действительности, порождаются диаграммой на рис. 2D. При подстановке вместо него градиента, что соответствует приходящей волне в виде чистого градиента, я должен был бы получить нуль. Если я ввожу градиентное преобразование $q_\alpha \xi_\beta$ для $e_{\alpha\beta}^a$ над этим членом D, я получаю взаимодействие между ξ и другим полем $e_{\alpha\beta}^a$, связанное с трехгравитонным взаимодействием. Результат, в той мере, в которой участвует линия вещества, заключается в том, что на вещество действует в первом порядке результирующее поле $e_{\mu\sigma}^b \xi_\sigma q_r^a + 1/2 q_a^b e_{\mu\nu} \xi_a$, что в точности соответствует двум последним членам в (5). Правило заключается в том, что поле, действующее на вещество, само должно быть инвариантным, как описывается соотношением (5), но здесь, на рис. 2, я уже вычислил все поправки, генератор и все необходимые нелинейности, возникающие при учете всех диаграмм. Короче говоря, в асимптотическом приближении, при включении всех диаграмм, подобных D, инвариантность нужно проверять для полного градиента, добавленного в приходящую волну. Нелинейности можно оставить, как есть при вычислении взаимодействия.

Я хотел бы теперь подчеркнуть еще одно очень важное для нашей дискуссии обстоятельство. Если я прибавляю полный градиент, то, как я говорил, результатом будет нуль. Обозначим во всех диаграммах через a входящий гравитон и через b — другой. Результат будет равен нулю, если я использую в качестве a градиент, только если b является свободным гравитоном без источников; т. е. если b является чистым гравитоном с $(q^b)^2 = 0$ или чистым потенциалом, являющимся решением однородного волнового уравнения. Эта ситуация отличается от электродинамики, где поле b может быть любым потенциалом, и добавление градиента в a ничего не меняет. В гравитационной теории b должно быть чистой волной, как следует из простых соображений. Не существует никакого способа избежать этого изменением какого-либо пропагатора, но это не порок теории, здесь есть определенное физическое содержание. Это содержание можно проследить следующим образом: если у b есть источник, я модифицирую мои диаграммы так, чтобы его показать, например как частицу, порождающую b . Для этого я добавляю в конец каждой линии b линию вещества, как показано на рис. 3а. (рис. 2а переходит в рис. 3b и т. д.).

Теперь, если b не является свободной волной, а порождено источником, имеет место следующее. Если « a » поле считать градиентным полем, действующим везде и во всех диаграммах, оно дает нуль. Но мы кое-что забыли: существует другой тип диаграмм, одна из которых выглядит, как показано на рис. 3с, если « a » полагается вседействующим, то оно действует на источник b , и тогда b взаимодействует с первоначальными частицами. Другими словами, среди всех диаграмм с источниками

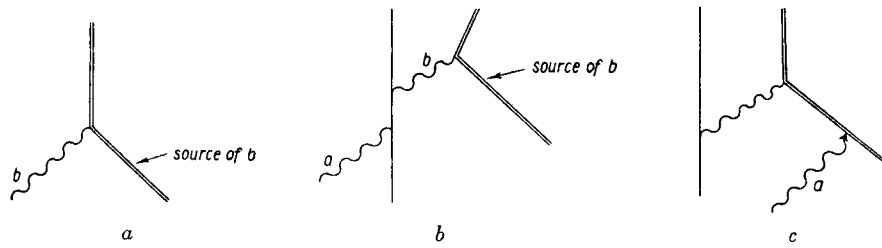


Рис. 3.

существуют также диаграммы типа 3с. Сумма всех диаграмм равна нулю, однако сумма диаграмм типа приведенных на рис. 2, не содержащих тип 3с, отлична от нуля и поэтому, если их честно вычислить, забыв об источнике b , а затем подставить вместо « a » градиент, результат оказался бы ненулевым; но он должен был бы компенсировать члены типа 3с при корректном проведении расчетов. Это окажется очень важным. Я проделал много вычислений, подобных этому без замкнутых петель, но я не буду занимать ваше внимание всеми возникающими здесь проблемами и ответами на них, они не содержат ничего нового. Я имею в виду — ничего интересного, в том смысле, что на этом пути не возникает очевидных трудностей.

Однако, на следующем шаге появляются ситуации, которые мы называем замкнутыми петлями, кольцами или цепями, в которых не все импульсы задачи определены. Позвольте заметить следующее. Я анализировал этот метод как при решении нескольких задач, так и с помощью высококлассной математической техники, которой я владею, но которой не верю. Я должен проверять ее на физических задачах. Я могу доказать, что независимо от сложности задачи, если к ней удастся подойти так, что в ней нет кольцевых диаграмм, все импульсы определены, инвариантность удовлетворяется, система не зависит от начального выбора калибровки и пропагатора и, вообще, все хорошо, то никаких трудностей не возникает. Я подчеркиваю, что этот случай содержит все классические ситуации, и утверждаю, что в классической теории гравитации нет никаких трудностей. Это не означает крупного открытия, потому что в конце концов вас беспокоили трудности, которые я посчитал несуществующими, но дает представление о масштабах того, что я понимаю под трудностями! Если мы обратимся к следующему случаю, например, взаимодействию двух частиц в высших порядках, то придем к диаграммам, из которых я выпишу только несколько. Одна из них, которая выглядит так, и в которой происходит обмен двух гравитонов или, например, гравитон расщепляется на

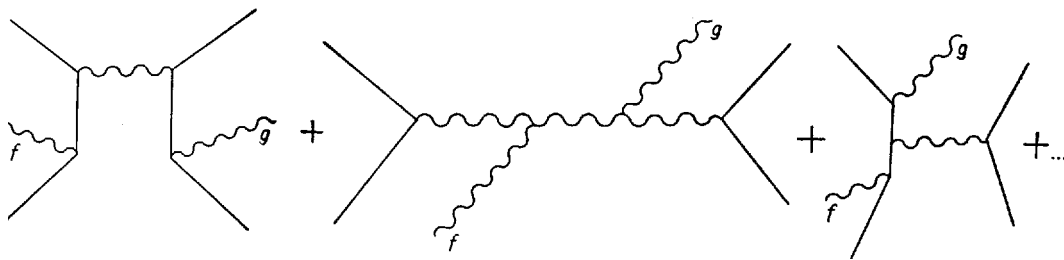


Рис. 4.

два, а затем восстанавливается из них — представляет собой только начало ряда диаграмм с пугающе возрастающей сложностью, соответствующих задаче вычисления лэмбовского сдвига или радиационных поправок в атоме водорода. Когда я пытался решить эту задачу, я действовал прямолинейно, соблюдая все правила, подставляя пропагаторы $1/k^2$ и т. д. У меня возникали некоторые трудности,

по-видимому, отсутствовала калибровочная инвариантность, но это было связано со способом обрыва бесконечного ряда диаграмм. Недостаток времени не позволяет мне объяснить, как я с этим крутился, но несмотря на все усилия, результат, однако, оказывается определенно неверным. Он обладает калибровочной инвариантностью, даже красотой, но он неверен, и вот откуда я это знаю. Для достижения калибровочной инвариантности я должен был проделать множество манипуляций, и у меня возникало подозрение, что решение неоднозначно. Я понял, что кто-либо другой может сделать это другим способом, и старался проделать как можно больше тестов, будучи скептически настроенным. Мой студент Юра проверял единственность решения. Все это означает следующее: рассмотрим вместо задачи рассеяния на рис. 4, в которой время направлено вертикально, задачу с такими же диаграммами, но с горизонтальным временем, т. е., задачу аннигиляции пары с порождением другой пары, и вычислим поправки во втором приближении. Предположим для простоты, что конечное состояние пары такое же, что и начальное. Тогда, суммирование всех диаграмм дает амплитуду событий аннигиляции пары частица — античастица и последующего восстановления пары; иными словами, амплитуду того, что пара находится в том же состоянии, как функцию времени. В общем случае, амплитуда останется в том же состоянии за время T содержит форму:

$$e^{-i(E_0 - i\frac{\gamma}{2})T}$$

Вы видите, что мнимая часть фазы меняется как $e^{-\frac{\gamma}{2}T}$, что означает экспоненциальное убывание вероятности того же состояния со временем. Почему она убывает? Потому что существует другая возможность, а именно, эти два объекта могут слиться, аннигилировать и породить пару гравитонов. Поэтому необходимо, чтобы скорость затухания замкнутых петель диаграммы рис. 4, которую я получаю прямым нахождением мнимой части суммы, согласовывалась бы с полученной независимо. Конкретно, какова скорость, с которой частица и античастица аннигилируют с образованием двух гравитонов? И это несложно сосчитать (также, как с диаграммами рис. 2, только повернутыми на бок). Я вычислил эту скорость из рис. 2 и проверил, согласуется ли она со скоростью затухания вероятности пребывания в исходном состоянии (мнимой частью рис. 4). Ответ был отрицательный. Что-то было не так.

Это заставило меня исследовать проблему во всех деталях и выяснить, в чем причина. В процессе исследования я обнаружил две вещи. Во-первых, я установил ряд теорем, насколько мне известно, новых, относящихся к диаграммам типа замкнутых петель и диаграмм, не содержащих их (последние я буду называть «деревьями»). Унитарное соотношение, которое я только что описал, является одной из связей между деревом и петлей, и я обнаружил целое множество других, что дает мне больше возможностей для тестирования всей процедуры. Сейчас я прокомментирую эту теорему, порождающую другие правила, это весьма поучительно. Я доказал, в действительности, что вы можете выразить любую диаграмму с кольцами полностью в терминах диаграмм с деревьями, со всеми импульсами и массами в физически значимых случаях. Это очень просто продемонстрировать разными путями, я выберу следующий. Распространение, как я говорил, происходит с амплитудой $1/k^2$. При переходе к пространственному представлению, это дает определенную пропагаторную функцию двух точек в пространстве-времени 1, 2, обозначаемую $K_+(1, 2)$. Она представляет приходящую волну в прошлом и уходящую в будущем; и это традиционный пропагатор с $i\epsilon$ и пр. Однако, это — всего-навсего решение уравнения пропагатора, т. е. волнового уравнения; как известно, это — частное решение. Существуют другие, например, чисто запаздывающее решение,

которое я обозначу K_{ret} , и которое существует лишь внутри будущего светового конуса. Теперь, если у вас есть две функции Грина для одного уравнения, их разность должна быть решением однородного уравнения, обозначим его K_x . Это означает, что K_x есть решение свободного уравнения и $K_+ = K_{\text{ret}} + K_x$. В кольце на рис. 4а мы имеем произведение таких K_+ . Например, для четырех точек 1, 2, 3, 4 в кольце мы имеем произведение: $K_+(1, 2)K_+(2, 3)K_+(3, 4)K_+(4, 1)$ (все K различны, некоторые принадлежат гравитонам, а некоторые являются пропагаторами для частиц и т. д.). Теперь посмотрим, что произойдет, если мы заменим один или несколько таких K_+ на K_x , например, $K_+(1, 2)$ на $K_x(1, 2)$? Теперь между 1 и 2 у нас только свободные частицы, вы разорвали кольцо и получили открытую диаграмму, потому что K_x — свободное волновое решение, и это означает интегрирование по импульсам свободных частиц на поверхности масс, и процедура является совершенно корректной. Поэтому, если мы заменим один K_+ на K_x , то эта линия станет незамкнутой, и это будет означать наличие еще одной частицы, рассеиваемой вперед, это фиктивная частица, соответствующая этому пропагатору, который надо проинтегрировать, но диаграмма становится открытой — типа дерева, совершенно определенной и однозначно вычисляемой. Но я сказал, что может быть разомкнута любая диаграмма. Сначала замечу, что если я поставлю K_{ret} вместо всех K в кольце, я получу нуль:

$$K_{\text{ret}}(1, 2)K_{\text{ret}}(2, 3)K_{\text{ret}}(3, 4)K_{\text{ret}}(4, 1) = 0, \quad (9)$$

т. к. для того, чтобы (9) было отлично от нуля, t_1 должно быть больше чем, t_2 , $t_2 > t_3$ и $t_4 > t_1$, что невозможно. Теперь подставим $K_{\text{ret}} = K_+ - K_x$ в (9). Мы получим либо все K_+ в каждом множителе, что соответствует замкнутой петле, либо по крайней мере один K_x , представляемый древообразной диаграммой. Поскольку сумма по диаграммам равна нулю, замкнутая петля может быть представлена в виде интегралов по деревьям. Я был удивлен, что не заметил этого раньше.

Затем я проверяю, согласуются ли эти открытые диаграммы на рис. 4 с теоремой. Я надеялся, что теорема, доказанная для мезонных полей сохранится и для случая гравитации, так, что при появлении линии виртуального гравитона дерево будет соответствовать рассеянию вперед свободных гравитационных волн. Но это не работает в гравитационном случае. Можно спросить почему, когда только что было продемонстрировано, что это должно работать? Соображение, почему это так, связано с положением полюсов пропагатора; типичный пропагатор — это множитель вида $1/(k^2 - m^2 + i\epsilon)$, содержащий $+i\epsilon$ полюсов, и все, что надо сделать, — это изменить правило обхода полюсов и ввести дополнительные дельта-функции $\delta(k^2 - m^2)$ для свободных входящих и уходящих волн. Я хочу, чтобы эти свободные волны представляли собой физические гравитоны, а не что-либо другое. Они, конечно, представляют волны $q^2 = 0$, но, как оказывается, с неправильным направлением поляризации для свободных гравитонов. Я хочу это показать. Для этого надо проанализировать числитель. Пропагатор, который я записывал раньше и который имеет вид $S'_{\mu\nu} = 1/(k^2 + i\epsilon)$, умноженный на $\bar{S}'_{\mu\nu}$, заменяется на $S_{\mu\nu}\delta(q^2)\bar{S}'_{\mu\nu}$. Теперь, когда я пишу $q^2 = 0$, я получаю свободную волну вместо произвольного импульса. Это *должен* быть реальный гравитон, в противном случае мы придем к серьезным физическим затруднениям. Он таковым не является, несмотря на то, что у него нулевой импульс, он не является поперечным. Можно забыть об одном индексе в $S_{\mu\nu}$ — его тащить слишком хлопотно, пока представим, что у нас один индекс $S_{\mu}S_{\mu}\delta(q^2)$. Эта комбинация $S_{\mu}S'_{\mu}$, есть $S_4S'_4 - S_3S'_3 - S_1S'_1 - S_2S'_2$, где 4 обозначает время, а 3 — направление импульса в 4-х векторе q . Тогда 1 и 2 — это поперечные компоненты, которые только нам и нужны. (Для упрощения я убрал один индекс, не забываяте, пожалуйста). Мы хотим только $-S_1S'_1 - S_2S'_2$ вместо суммы четырех

членов. Что происходит с членом $S_4 S'_4 - S_3 S'_3$? Это $S_4 - S_3$, умноженное на $S'_4 + S'_3$, плюс $S_4 + S_3$, умноженное на $S'_4 - S'_3$. Но $S_4 - S_3$ пропорционально $q_\mu S_\mu$ (убираем один индекс), потому что q_4 в этих обозначениях есть частота, и она равна q_3 , если мы возьмем ось 3 в направлении импульса. Таким образом, $S_4 - S_3$ есть реакция системы на градиентный потенциал, который равен нулю, как мы показали при обсуждении инвариантности. Т. е., мы показали, что $(S_4 - S_3)/(S'_4 + S'_3) = 0$, и это должно обеспечиваться чисто поперечными волновыми вкладами. Но этого не происходит, потому что *доказательство того, что отклик на градиентный потенциал равен нулю, требует, чтобы другая взаимодействующая частица была действительно свободным гравитоном*. Сумма $S'_4 + S'_3$ таковым не является — она не поперечна и не представляет корректный тип гравитона. Видно, что единственное, что позволит получить поляризацию 4 + 5 в направлении 4 – 3, — это наличие того, что я называю азимутальным откликом; т. к. это не поперечная волна. Такая волна может быть сгенерирована каким-то дурным искусственным источником, она не является свободной. Когда существует искусственный источник для одного гравитона, даже если второй представляет собой чистый градиент, то сумма всех диаграмм не будет нулевой. Если пучок не представляет собой точно свободную строго поперечную волну, то, как было указано выше, аргумент связанный с условием, что градиент должен обратиться в нуль, теряет силу по ранее указанной причине.

Хотя этот градиент для $S_4 - S_3$ является тем, что я ищу и, я надеюсь, должен обратиться в нуль, я забыл, что другой конец диаграммы $S'_4 - S'_3$ является причудливой волной, не сводящейся к градиенту и не являющейся свободной, — и поэтому вы не получите нулевой результат, т. е. что-то в этой схеме принципиально неверно.

Мне удалось обнаружить еще одну интересную деталь. Существует другая теория, более известная в мезонной физике, т. н. теория Янга-Миллса. Это весьма специфичная теория, и она никогда не анализировалась детально. Я рассматриваю ее безмассовый вариант. Она во многом аналогична гравитации; вместо группы координатных преобразований, в качестве универсального источника в ней выступает группа вращений изотопического спина. Она, подобно гравитации, нелинейна, и между ними существуют дальнейшие аналогии. Я рассмотрел теорию Янга-Миллса с нулевой массой, следуя предложению Гелл-Манна; она содержит калибровочную группу, и я обнаружил в ней трудности, подобные вышеописанным. Эти трудности не были, строго говоря, совершенно неизвестными, и должны были бы быть замечены исследователями мезонов, возившимися с теорией Янга-Миллса. Однако из-за своей прагматичности, они все-таки не заметили проблем ввиду того, что теория Янга-Миллса явно не занимается безмассовым полем, которое должно было бы прямо уходить из ядра и быть заметным. Поэтому «мезонщики» не исследовали внимательно безмассовый случай. Эта же болезнь относится и к другим теориям. По крайней мере, одно хорошо: гравитация не одинока в своих трудностях. Тот факт, что теория Янга-Миллса также встречается с серьезными проблемами, является очень значимым для меня, это поможет в дальнейшем подойти к решению задач, о которых я говорил выше. Главным здесь является то, что, если мы имеем в двух теориях одну и ту же болезнь, то можно не беспокоиться о целом ряде других вещей. Если у двух теорий есть различия, то их общий недуг связан не с ними. Например, в гравитационной теории в лагранжиане перед вторыми производными от $g_{\mu\nu}$ стоят выражения, содержащие другие компоненты g , т. е. самого поля. Я думаю, что это должно вызвать некоторые трудности. В теории же Янга-Миллса этого нет, поэтому нет и подобных проблем. Это ее первое преимущество — она ограничивает число различных возможностей. Второе заключается в том, что вычисления в ней проводятся гораздо легче, чем в теории гравитации, поэтому большую часть своих

исследований я проводил на ее базе, исходя из того, что если мне удастся преодолеть какие-либо трудности, то тем самым это поможет при построении гравитационной теории. Можно продемонстрировать, как линия за линией в диаграммах, подобно переносу музыки на другую партитуру, происходит преобразование одной теории в другую. Для примера, расчет диаграммы рис. 4b в теории Янга-Миллса займет у меня день, в то время как в случае теории гравитации многочисленные итерации потребовали, в конце концов, применения машинных методов аналитических вычислений, причем только алгебраические преобразования (интегралы я вычислил потом сам) полностью загрузили программу Джона Меттьюса, одну из самых мощных в этой области. Кстати, насколько мне известно, это было исторически первой последовательно машинной аналитической работой, которую невозможно было сделать вручную.

Каким же образом преодолевать эти трудности? Я пробовал развивать следующую идею: в предположении справедливости теоремы о древообразных диаграммах, я попробовал использовать ее в обратном порядке. Если каждую кольцевую диаграмму можно выразить через древообразные и по ним провести вычисления без существенных затруднений, то все, что надо сделать, — это сказать, что замкнутая петля есть сумма соответствующих деревьев. Наконец, в каждой древообразной диаграмме, в которой открывается линия гравитона, надо взять только действительный поперечный гравитон для представления соответствующего члена. Это служит определением процедуры расчета замкнутых петель-диаграмм; старые правила, оперирующие с пропагаторами $1/k^2 + i\epsilon$ и т. п., не применяются. Преимущества такого подхода заключаются, во-первых, в том, что он будет калибровочно инвариантен, во-вторых, однозначным, в силу соотношения между замкнутой и открытой диаграммами, в-третьих, он обладает единственностью по отношению к результату, в нем нет произвольных калибровок, как было в случае кольцевых диаграмм.

Однако, эта программа предусматривает еще одно условие. Действительно, мы показали, что каждая кольцевая диаграмма может быть разбита на деревья, но данное дерево не является калибровочно инвариантным, как видно, например, на диаграмме рис. 2A. Каждая из диаграмм на рис. 2 калибровочно неинвариантна, а также любая их комбинация, за исключением суммы всех четырех диаграмм. Дело обстоит следующим образом. Предположим, я учел все процессы в нужном порядке, например, все диаграммы четвертого порядка, показанные на рис. 4, и разбил всю картину на множество деревьев. Тогда я должен собрать эти деревья в группы

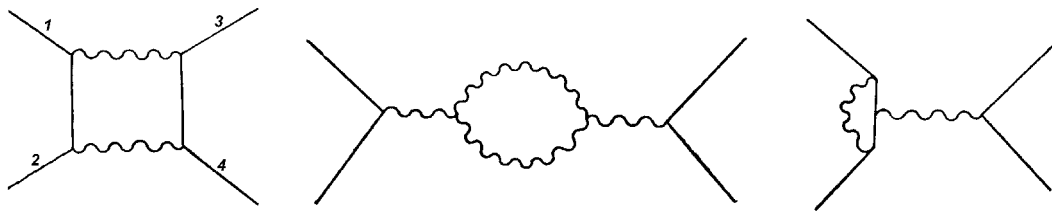


Рис. 5.

снова так, чтобы каждая группа содержала все диаграммы, относящиеся к данному процессу (например, четыре диаграммы на рис. 2), а не отдельные деревья. Эта сборка всех диаграмм, относящихся к данному процессу является очень важной операцией, т. к. только этот полный набор обладает калибровочной инвариантностью. Возникают вопросы: будут ли непарные диаграммы отброшены или включены в

общий процесс? Можно ли выразить замкнутую кольцевую диаграмму для некоторого процесса в виде суммы древообразных диаграмм других процессов?

В случае лишь одного кольца, как я показал, это возможно, и я этим пользуюсь. Поэтому эта проблема, в основном, решена; кольцевая диаграмма раскладывается на открытые части, определяются и рассчитываются соответствующие процессы и проводится суммирование.

Может возникнуть вопрос, каково общее правило для одиночного кольца; оно состоит из следующих этапов: сначала определяется сумма процессов низших порядков, в которых происходит рассеяние дополнительной частицы из рассматриваемой системы. Например, на рис. 4 мы имеем кольца для двухчастичного рассеяния. Здесь нет внешних гравитонов, но присутствуют два внутренних. Мы рассчитываем двухчастичное рассеяние в том же порядке, но при этом другая частица, например, гравитон, рассеивается вперед. Некоторые диаграммы, иллюстрирующие это, представлены на рис. 5. Состояние f то же, что и g ; появляется еще один гравитон и рассеивается вперед. Другими словами, мы рассеиваем вперед дополнительный гравитон. В дополнение, разрыв линии материи дает члены для прямого рассеяния дополнительного позитрона, электрона и т. д.; прямое рассеяние добавляется для каждой возможной дополнительной частицы. Это первый вклад. Но когда вы разрываете деревья, иногда разрываются две линии и вы получаете диаграммы, подобные приведенной на рис. 6. с двумя дополнительными частицами (в данном случае, гравитон и электрон), поэтому необходимо вычесть все диаграммы с двумя дополнительными частицами всех типов рассеяния. Затем добавляются диаграммы рассеяния трех дополнительных частиц и так далее. Это, я бы сказал, красивое правило, мне удалось получить не сразу, и у меня есть другие легко постигаемые варианты его обоснования.

Теперь возникает естественный и интересный вопрос: можно ли вернуться назад и найти правило непосредственного интегрирования замкнутых колец? Другими словами, можно ли так изменить правило, что при интегрировании новым методом получить тот же ответ, что при использовании разбиения на деревья? Нет пря-

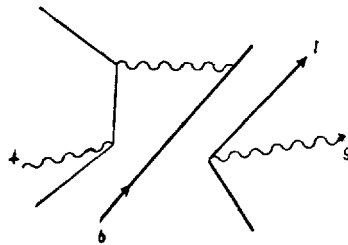


Рис. 6.

мой необходимости делать это, потому что мы уже имеем возможность получать результат, но зато это интересно, потому что есть шанс понять, что же делалось ошибочно на предыдущих этапах. Я исследовал этот вопрос детально, и оказалось, что необходимо сделать два изменения. Объяснить их в терминах гравитации довольно трудно, поэтому я начну с одного. Затем я постараюсь пояснить и второе, но это может вызвать некоторые недоразумения, потому что я должен в общем виде объяснить, что же я делаю, когда работаю с кольцевой диаграммой. Более всего это соответствует вычитанию из лагранжиана

$$\int \sqrt{g} \bar{H}^{\mu\nu}{}_{;\nu} H^{\sigma}{}_{\mu;\sigma} d\tau.$$

При этом уравнения движения перестают быть сингулярными. Теперь я хочу детально пояснить, что это означает в действительности. Как, вы говорите, в лагранжиан входят g и H ? Да при написании кольцевой диаграммы у вас есть вариации поля, по которым производится интегрирование и которые я обозначаю H ; и есть g , представляющее все внешние возмущения, которые можно суммировать в эффективном поле g . Теперь вы добавляете в лагранжиан дополнительный член, который делает его несингулярным. Это первый шаг; я пришел к нему методом проб и ошибок, когда делал его калибровочно инвариантным. Но затем вам надо вычестить из ответа результат, полученный в предположении, что кроме гравитона в замкнутой петле существует виртуальная частица, с которой он взаимодействует. Это — векторная частица, искусственно взаимодействующая с внешним полем так, чтобы скомпенсировать ошибку. Получаемые выражения очевидно инвариантны в вашем g -пространстве; они имеют свойства тензоров в этом пространстве, и поэтому мои результаты калибровочно инвариантны или координатно трансформируемы, как и требуется. Но они еще удовлетворяют в квантово-механическом требовании в том смысле, что они унитарны.

Теперь возникает вопрос: что будет, если мы имеем дело с двумя или большим количеством петель? Поскольку я полностью закончил работу со случаем одной петли всего лишь за неделю до приезда сюда, у меня не было достаточно времени на более или менее удовлетворительное рассмотрение двух и более колец. Предварительный анализ не указывает на столь же легкий путь получения нужного объединения ветвей. Удивительно, но я не понимаю этого; когда вы собираете деревья по процессам, то, оказывается, появляются лишние, дополнительные деревья. Сейчас я не понимаю этого и поэтому не настаиваю на том, что этот метод квантования может быть применен для следующих порядков, т. е., мы не уверены в надежности радиационных поправок к радиационным поправкам в лэмбовском сдвиге, неопределенность составляет величину 10^{-255} ридберг. Можно спокойно вздохнуть и сказать, что для всех мыслимых практических задач все в порядке. В настоящее время, к несчастью, хоть я и мог бы оставить это поле деятельности вам, исследователям, более искушенным в вопросах гравитации, я не могу этого сделать лишь на том основании, что эта величина мала, и, что проблема выходит за рамки разумного, если только она не бала неразумной изначально. К несчастью, я также обнаружил в процессе работы серьезные проблемы в теории Янга-Миллса, а также наткнулся на связь между деревьями и кольцами, представляющую большой интерес и важное значение для мезонных теорий. И теперь я втянут в эти исследования, и вы догадываетесь, что это является подспудным стимулом для продолжения работы, какой бы абсурдной, неразумной и академичной она ни выглядела. Мы все осознаем, что как бы ни был мал эффект, если он представляет физический интерес, и если к нему внимательно отнестись, то вы все время будете находить что-то, что будет полезно для чего-то еще.

Дискуссия

Мёллер: Могу ли я, не будучи специалистом, задать простой и, может быть, дурацкий вопрос. Если бы Вы располагали очень большим числом гравитонов, то не перейдут ли уравнения Вашей теории в уравнения эйнштейновской теории тяготения?

Фейнман: Именно так.

Мёллер: Вы совершенно в этом уверены?

Фейнман: Да, в действительности, когда я работал с полями, я делал это достаточно абстрактно, полагая произвольное число гравитонов; формулы определено

соотносятся с общей теорией относительности, здесь та же инвариантность; такие квантово-механические конструкции, как петельные диаграммы, содержат калибровочную инвариантность, правильные производные и пр. Никаких сомнений, что это эйнштейновская теория. Классический предел, над которым я сейчас работаю, это нелинейная теория в точности, соответствующая уравнениям Эйнштейна. Одно дело проверить это уравнениями, другое — вычислениями. Я математически доказал много неверных вещей. В доказательствах я неуклюж, я очень часто делаю ошибки. Я беру контурный интеграл по бесконечному числу переменных и не замечаю, что от одной из них лагранжиан не зависит, я делю два расходящихся интеграла друг на друга, отчего получаю разные ответы. В сутолоке я не замечаю ошибок в знаках, в нахождении пределов. Поэтому результаты надо проверять вычислениями, но я очень плохой вычислитель, я всегда получаю неправильный ответ. Но я сделал две вещи. Я проверил, что формы уравнений в обеих теориях одни и те же, и я проверил это на ряде задач квантовой механики, таких, как скорость излучения двойной звезды, удерживаемой квантово-механической силой, в нескольких порядках, получив тот же ответ, что и в классическом пределе. Или для гравитационного излучения двух, проходящих относительно друг друга звезд, простите, частиц — до любого порядка. (Для звезд существует своя специфика, связанная с взаимными приливами, так что речь идет именно о частицах). Если вы имеете дело с реальной гравитационной физической задачей, я уверен, мы располагаем правильным методом для ее решения. В этом нет сомнения. Я не берусь судить о космологии, где вы имеете неограниченные распределения вещества или где пространство может иметь кривизну на больших масштабах. Эти проблемы могут быть решены, но я ими не занимался. Я использую плоское на бесконечности пространство как фон для моих задач.

Мёллер: Но вы сказали, что не уверены в том, что Ваша теория ренормализуема.

Фейнман: Я не уверен, действительно.

Мёллер: Значимо ли это для случая большого количества гравитонов?

Фейнман: Нет; это по-прежнему классическая электродинамика; здесь нет ренормализации квантовой электродинамики. Бесконечности появляются в разных местах. Это разные проблемы.

Розен: Я не уверен в этом, но я не эксперт здесь; но у меня такое впечатление, что в силу нелинейности уравнений Эйнштейна появляется следующая трудность. В то время как линейные уравнения имеют решения в виде бесконечной плоской монохроматической волны, это не соответствует точному решению, потому что оно расходится на бесконечности. Может это сказаться на точности этого типа вычислений?

Фейнман: Нет, я учел это рядом поправок. Единичный гравитон — это не то же самое, что неограниченная гравитационная волна, он имеет конечную энергию $h\omega$.

Розен: Но вы используете разложение по импульсам, содержащее неограниченные волны.

Фейнман: Да, здесь есть поправки. Вы видели, что происходит когда вычисляются поправки. Если имеется приходящий таким образом гравитон, то появляются поправки к соответствующему кольцу и т. д. Это приводит, во-первых, как обычно, к расходимости, во-вторых, появляется член с q^2 под логарифмом, т. е. для строго плоской волны поправки не имеют никакого значения. Это следует понимать в следующем смысле: частица была испущена в некоторый момент в прошлом и обязательно должна быть поглощена в некоторый момент в будущем, она совершенно не может. При этом коэффициент перед логарифмом становится очень малым, и для любых разумных q^2 , таких, как диаметр Вселенной или нечто подобное, я

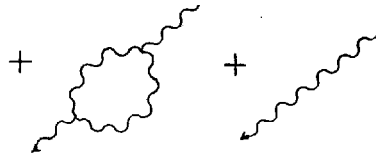


Рис.

по-прежнему могу получить разумный результат. Это перекликается с эффектом, который мы обсуждали: поправки к пропагатору гравитона зависят от логарифма квадрата импульса и обращались бы в бесконечность для гравитона с нулевым импульсом. Поэтому таких свободных гравитонов не существует. Строго говоря, надо было бы рассматривать волновые пакеты, но они могут быть очень протяженными, сравнимыми с длиной волны гравитона.

Андерсон: Я бы хотел спросить, встречались ли вы с такими же трудностями в электромагнитном случае, что и в теории Янга-Миллса и гравитации?

Фейнман: Нет. Калибровочная инвариантность диаграмм, подобных приведенным на рис. (без случая 2D) выполняется независимо от того, является b свободным или нет. Это связано с тем, что фотоны не являются источниками фотонов, они не заряжены.

Андерсон: Я хотел бы заметить еще, что собирая диаграммы в классы, легче было бы начинать всегда с вакуумных диаграмм и последовательно их открывать.

Фейнман: Я пробовал это, но безуспешно.

Иваненко: Если я понял Вас правильно, в Вашем изложении Вы использовали преобразование двух частиц в гравитоны. Так ли это?

Фейнман: Это был один из примеров.

Иваненко: Да. Этот процесс рассматривался, возможно только предварительно, нами и проф. Вебером и Брилем. Я задам Вам два вопроса. Есть ли у Вас эффективное сечение? Можете ли Вы указать эффект, для которого высокоэнергичный процесс играет важную роль?

Фейнман: Я никогда не рассматривал энергии выше миллиарда миллиардов BeV . Там сечения всех этих процессов становятся исчезающе малыми.

Иваненко: Они растут очень, очень быстро с энергией. Действительно, благодаря тому, что излучение квадрупольное, оно растет резко, в отличие от электромагнитного преобразования электрон-позитронных пар.

Фейнман: Оно действительно быстро растет. С другой стороны, оно начинает с такой малой величины, что надо продвинуться очень далеко, чтобы что-либо заметить. Это связано с тем, что величины, аналогичной $e^2/\hbar c$ в электродинамике, равной $1/137$, в гравитации не существует; все зависит от конкретной задачи: это связано с размерностью G . Если E это энергия некоторого процесса, то величина $GE^2/\hbar c$ эквивалентна $e^2/\hbar c$. Она может быть меньше, но никак не больше. Для того, чтобы она была порядка 1 %, т. е. сравнима с характеристикой процесса фотонной аннигиляции при обычных энергиях, нужно, чтобы GE^2 было порядка $\hbar c$ и, как неоднократно отмечалось, энергия должна быть величиной около 10^{-5} грамм или 10^{18} BeV . Ответ довольно очевиден: нужно взять величину интересующей нас энергии, возвести ее в квадрат, умножить на G и поделить на $\hbar c$; если получается хоть сколько-нибудь значимая величина, то вы получаете тот или иной эффект. Правда, величина сечения расти не столь быстро; поэтому либо получается пренебрежимо малый эффект, либо надо иметь дело с фантастическими энергиями.

Вебер: У меня есть сечение, которое может быть частичным ответом на вопрос Иваненко. Могу я написать его на доске? Мы проделали каноническое квантование, не столь тонченное, как то что мы только что услышали, но учитывающее взаи-

модействие фотонов и гравитонов. Оказывается, что уже в линейном приближении есть вероятность порождения гравитонов рассеянием фотонов в кулоновском поле. И сечение оказывается равным $8\pi^2$, умноженным на гравитационную постоянную, на энергию рассеяния, на толщину рассеивателя в направлении распространения фотона и деленным на c^4 . Это предполагает большую величину толщины рассеивателя по сравнению с длиной волны фотона. Мы получили этот результат квантованием и обратили внимание на то, что он не содержит постоянной Планка, поэтому мы решили вычислить его классически. Теперь, если подставить числовые параметры, сечение рассеяния галактики ее однородным магнитным полем составит величину 10^{28} см², что намного больше, чем то, что Вы обсуждали. Это соответствует скорости преобразования фотонов в гравитоны в количестве 1 на 10^{16} . Это, конечно, слишком малая величина, чтобы быть измеренной. Мы также рассмотрели возможность использования этого сечения в лабораторном эксперименте, в котором рассеивателем является магнитное поле, скажем, в миллион гаусс, сосредоточенное в объеме порядка одного кубического метра. Это оказалось совершенно невозможным, результат полностью противоречил тому, что появилось в русской литературе. В действительности, теория флуктуаций дает для лабораторного эксперимента по образованию гравитонов рассеянием фотонов в кулоновском поле величину рассеиваемой мощности больше, чем удвоенный квадратный корень из kT , умноженный на энергию фотона и деленный на время усреднения. Я полагаю, что неправильные результаты, появившиеся в литературе, были связаны с утверждением, что ΔP должно быть больше kT , усредненной по интервалу времени τ . По размерности эти величины совпадают, но по порядку величины подобный эксперимент по рассеянию потребовал бы около 10^{50} ватт мощности. Может быть я скажу об этом сегодня, сейчас я не хочу больше занимать ваше время.

Де-Витт: Я бы хотел задать проф. Фейнману следующие вопросы. Во-первых, я прошу его дать строгую формулировку теоремы о деревьях, и, во-вторых, показать, насколько это можно сделать, основу доказательства для случая одной петли, которое, как я понял, работает. Затем, подробнее прокомментировать структуру и природу виртуальных частиц, необходимых для ренормализации петель. И, если Вы предпочитаете, то сделайте это для теории Янга-Миллса, если Вам это удобнее.

Фейнман: Я не думаю, что пускаться в сложные математические выкладки и доказательства в большой аудитории является эффективным. Но поскольку мне задан вопрос, я с удовольствием на него отвечу, причем я хотел бы привести физическое обоснование такой теоремы и ее природы; хотя у меня есть и формальное доказательство.

Де-Витт: Можно сначала привести формулировку теоремы?

Фейнман: Этой формулировки у меня нет. Она есть для случая одной петли, и она такова... — позвольте мне сформулировать ответ по-своему. Сначала позвольте мне рассказать, как я думал об этой безумной проблеме. Я был приглашен в Брюссель с докладом по электродинамике на 50-летие Сольвеевской конференции 1911 по излучению. Я представил себе воображаемую аудиторию этого года, среди которой были Эйнштейн, Лоренц и другие классики современной физики, и я должен был в максимально простой форме изложить квантовую электродинамику. Я начал с объяснения энергии самодействия, например, лэмбовского сдвига. Как можно просто объяснить лэмбовский сдвиг в атоме водорода? Оказалось, просто никак, — они тогда еще не знали даже о существовании атомного ядра. Тем не менее, я придумал следующее. Я бы сказал Лоренцу, что его идея, о которой он докладывал на Сольвеевской конференции, о представлении электромагнитного поля в виде большого числа осцилляторов оказалась правильной. Также правильным оказался подход Планка к квантованию этих осцилляторов. Замечательно, что все

это уже было в 1911 году. Статья Планка, в которой он заключает, что энергия каждого осциллятора есть не $n\hbar\omega$, а $(n + 1/2)\hbar\omega$ также оказалась верной; как и то, что это создает существенные трудности, поскольку приводит к бесконечной энергии поля при неограниченном числе лоренцевских мод, если на каждую из них приходится энергия нулевого состояния $\hbar\omega/2$. Это — серьезная проблема квантовой электродинамики, которая должна быть решена в первую очередь. Метод, с помощью которого мы устраняем эту проблему, достаточно прост: мы переопределяем нуль-пункт отсчета энергии, потому что, конечно, абсолютная энергия не имеет физического значения. В случае гравитации, абсолютная энергия имеет некоторый смысл, но я не могу это обсуждать, т. к. это требует владения определенными техническими навыками в гравитационной теории. Теперь предположим, я сделал маленькое отверстие в некотором ящике и впустил в него малое количество газообразного водорода из баллона; такое количество, что плотность газа соответствует показателю преломления, отличающемуся от единицы на величину, пропорциональную A , количеству атомов. С изменением показателя преломления частоты всех нормальных мод также изменятся. Каждая нормальная мода имеет одну и ту же длину волны, как и прежде, определяемую размерами ящика, но частоты изменятся. Соответственно, все $\hbar\omega$ должны незначительно сместиться, что приведет к смещению энергии. Хотя мы вычитаем вакуумную величину $\hbar\omega/2$, при заполнении газом появляется поправка, пропорциональная количеству атомов, и ее можно связать с энергией каждого атома. Вы можете сказать, эта энергия уже есть у атомов в баллоне, но я предложу оценить разность энергий в $2S$ и $2P$ состояниях. При изменении возбуждения водородного газа от $2S$ до $2P$ показатель изменяется без удаления чего-либо; разница энергий, необходимая для изменения состояния от $2S$ до $2P$ для всех атомов состоит не только из энергии, вычисляемой с отбрасыванием нулевого уровня, но и с учетом малого изменения энергии нулевого состояния. Эта незначительная разница энергий должна быть лэмбовским эффектом. Я думаю, это замечательный аргумент; вопрос в том, является ли он верным. По меньшей мере он представляет интерес, потому что, как вы хорошо знаете, показатель преломления отличается от единицы на величину, пропорциональную рассеянию γ лучей с импульсом k вперед и, поэтому, энергетический сдвиг определяется, в основном, суммой по всем импульсным состояниям при прямом рассеянии. Я сравнил прямое рассеяние с правильной формулой для Лэмбовского сдвига, и это было неправильно, конечно; это слишком просто. Но мы кое-что забыли. Как пояснил Дирак, существуют электронные состояния с отрицательной энергией, причем все они заполнены. Атомы водорода также рассеиваются этими отрицательными электронами, поэтому их энергетические уровни получают дополнительный малый сдвиг, и должен быть соответствующий дополнительный член, описывающий прямое рассеяние позитронов, т. е. электронов с отрицательными энергиями. Из соображений симметрии, можно полагать, что в половине случаев мы имеем дело с дырочными состояниями позитронов, а в половине — электронов; поэтому прямое рассеяние состоит из двух равных электронных и позитронных компонент и рассеяния на γ -квантах, сумма всех амплитуд этих процессов должна быть равной собственной энергии водородного атома. Это одновременно и очень просто, и очень странно. Странность заключается в том, что прямое рассеяние это реальный процесс. В конце концов, я нашел формулу, к которой всегда стремился, для разности энергий (которая определяется в терминах виртуальных полей), выраженной через реально наблюдаемые величины, независимо от действительных экспериментальных трудностей — я имею в виду то, что я умею вычислять рассеяние. Много раз, исследуя разность энергий между протоном и нейтроном, возникающую из-за электрического взаимодействия, я надеялся найти теорему, выражающую эту раз-

ность в виде суммы сечений ряда реальных физических процессов, независимо от того, насколько трудно их измерить. Это кладет начало подобной формуле. Это не обычное выражение. У меня нет формулировки законов квантовой гравитодинамики, я только предлагаю метод вычислений. Когда я предлагаю способ работы с замкнутыми петлями, оказывается что обычные методы не работают, они приводят к неединственности и другим неприятным последствиям. Но они применимы к древообразным диаграммам, как, в этом случае, надо формулировать результат для кольца? Вариант, который я выбрал выглядит так: я беру кольцевую диаграмму общего вида в мезонной теории, одиночное кольцо может быть записано как эквивалентное множество древообразных диаграмм. Я делаю затем предположение, что кольцо в объединенной теории должно соответствовать сумме реальных физических процессов, описываемых древообразными диаграммами, и приравниваю одно другому. Я не забочусь о калибровке и прочих вещах, все, что я имею в виду, — это то, что для фотонов и любых нейтральных объектов, независимо от их вида, если это не гравитоны, теорема верна. Я предполагаю, что она справедлива и для реальных гравитонов, и предполагаю также, что результатом рассеяния являются чисто поперечные реальные свободные гравитоны с $q^2 = 0$. Таким образом, я полагаю это кольцо равным этому множеству деревьев. Каждый член этого представления может быть вычислен. И оно калибровочно инвариантно, т. е., если ко всему кольцу прибавить дополнительный потенциал, внешнее возмущение типа координатного преобразования — чисто градиентную волну — оно добавится ко всем процессам, но не повлияет на них и не повлияет на их сумму. Отсюда я знаю, что мое определение кольца калибровочно инвариантно. Далее, унитарность есть свойство разрыва этой диаграммы; ее мнимая часть уже разбита так, что можно немедленно показать унитарность. И так для каждого члена разложения. И я прихожу к определению гравитации с помощью одного кольца. Что же мешает мне рассмотреть два кольца? Отсутствие полного набора процессов, который соответствует им; я могу разомкнуть кольца, но я не могу объединить полученные части в множества, соответствующие законченным физическим процессам. Другими словами, некоторые из них соответствуют рассеянию гравитонов, но в него не входит ряд диаграмм. Но рассеяние гравитона по неполному набору диаграмм не является больше калибровочно инвариантным, я имею в виду, что инвариантность неочевидна, и весь метод теряет силу. Я не знаю, что с этим делать. Такова ситуация, и она зависит от определенного плана действий. Существует, конечно, другой выход, а именно (я хотел говорить о нем в конце, может быть, я очень быстро излагаю): после всего я определил, чему равен результат, — по определению, непетлевую диаграмму. Можно преобразовать в нечто, а это нечто эквивалентно петлевой диаграмме, по определению. Конечно, как с практической точки зрения, так и исходя из чистого интереса, возникает вопрос, можно ли с самого начала непосредственно рассчитать кольцевые диаграммы с помощью некоторых математических ухищрений и получить тот же ответ, что и при разложении по деревьям. И я нашел способ, как непосредственно получить кольцевой интеграл. Я должен вычесть нечто из диаграммы векторной частицы, используемой вместо гравитона, чтобы получить правильный ответ. Т. е. я знаю правило, знаю его обоснование, и у меня есть доказательство его применимости для одного кольца. У меня два пути для расширения. Я могу разбить два кольца на открытые куски и применять технику для одного кольца, это — путь, на котором я застрял. Или применить вышеупомянутое правило и попытаться обобщить его на произвольное число колец. Но здесь снова тупик. Но я располагал всего одной неделей, я смог лишь прояснить трудности, связанные с проблемой одного кольца, и должен был потратить много времени для проверки; я успел проверить результаты для данной конференции. Конечно, вы можете спрашивать меня о ве-

цах, о которых я не успел как следует подумать; я весьма сожалею об этом, я много работал, чтобы быть в чем-либо уверенным, и теперь вы спрашиваете меня о предметах, для которых у меня не было времени. Я надеюсь, мне удастся одолеть их. Может быть, я еще не в окончательном тупике.

Де-Витт: Поскольку виртуальная частица, которую Вы упомянули в конце, представляет интерес, возможно, также в связи с некоторыми работами доктора Бьялики-Бирули, продвинулись ли Вы достаточно, чтобы Вы могли повторить ваши рассуждения более детально? Какова ее структура, каким уравнениям она удовлетворяет, каков ее пропагатор? Это технические вопросы, но они представляют интерес.

Фейнман: Дайте мне десять минут. И позвольте мне показать, как проводится математический анализ древообразных и кольцевых диаграмм. Сейчас я могу показать вам, что я могу писать уравнения, которые никто не сможет понять. Перед этим я хотел бы остановиться на ряде свойств этого результата, которые представляют интерес. Прежде всего, в случае Янга-Миллса существует теория, нарушающая первоначальную идею симметрии изотопического спина (на которой она была первоначально построена) простым допущением того, что частица имеет массу. Это означает добавление в лагранжиан члена $-\mu^2 a_\mu a^\mu$, где a_μ — изотопический вектор. Это нарушает калибровочную инвариантность теории — как в электродинамике с массой, это — «грязная» теория. Зная, что нет поля с нулевой массой, часто говорят: «давайте добавим массовый член». Как только вы его добавляете теряется калибровочная инвариантность, но лагранжиан становится и несингулярным по тем же причинам, по которым он не инвариантен. Поэтому все может быть решено точно. Пропагатор между двумя токами вместо $\delta_{\mu\nu}$ становится:

$$\frac{\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / \mu^2}{q^2 - \mu^2}, \quad (10)$$

где q_μ — это импульс распространяющейся частицы. Множитель $1/(q^2 - \mu^2)$ является типичным для массы μ , но член $-q_\mu q_\nu / \mu^2$ является важным, он должен быть положен равным нулю в электродинамике, но отнюдь не очевидно, равен ли он нулю в теории Янга-Миллса. В действительности, было показано, что он не может быть нулевым; этот пропагатор используется при взаимодействии двух токов. Я использую теорию Янга-Миллса вместо гравитации. Меня интересует случай $\mu^2 = 0$ и то, могу ли я прийти к нему вычислением с конечным μ^2 с последующим переходом к пределу $\mu^2 = 0$.

Теперь с $\mu^2 \neq 0$ мы имеем определенный пропагатор, и никаких двусмысленностей с замкнутыми кольцами не возникает. У меня нет выбора, я просто должен вычислить этот пропагатор. Здесь нет никаких трудностей, но нет и калибровочной инвариантности.

И, конечно, я сделал проверку. Я разложил кольца и сосчитал методом разложения задачу достаточной сложности (взаимодействие двух электронов). Я проделал вычисления как методом разложения, так и методом замкнутого кольца. Результаты совпали, и я не вижу причин, по которым они могли бы не совпасть. Оказалось, что для древообразных диаграмм не нужно беспокоиться о члене $q_\mu q_\nu / \mu^2$, он может быть опущен, но он важен для кольца. Древообразные диаграммы имеют определенный предел при μ^2 , стремящимся к нулю. Существует замкнутая диаграмма, эквивалентная древообразной при массе равно нулю, поэтому предел при μ^2 , стремящемся к нулю, должен быть тем же, что и в случае $\mu = 0$. Кажется естественной идея об определении теории с $\mu^2 = 0$ таким путем. Но вы не можете положить μ^2 равным нулю в (10) из-за $q_\mu q_\nu / \mu^2$. Поэтому необходимо проверить, существует ли способ так переопределить кольцевую диаграмму для случая $\mu^2 = 0$, чтобы новый

пропагатор допускал предельный переход $\mu^2 \rightarrow 0$. Это был бы новый путь к безмассовому случаю, и я нашел нужную формулу этим путем. Я постараюсь объяснить, как найти соответствующую теорию.

Мы отправляемся от определенной теории, теории Янга-Миллса с ненулевой массой (для того, чтобы избежать двусмысленностей), с последующим переходом к нулевой массе. Мы имеем лагранжиан $\mathcal{L}(A, \varphi)$, содержащий векторный потенциал этого поля и поле φ материи, с которой первый взаимодействует как поле нулевой массы, для конечной массы добавляется член $\mu^2 A_\mu A_\mu$. Этот лагранжиан надо проинтегрировать по всем A и φ , и для амплитуды получим:

$$X = \int e^{\int \mathcal{L}(A, \varphi) d\tau + \mu^2 A_\mu A_\mu d\tau} DA D\varphi. \quad (11)$$

Но что делать с начальными и конечными условиями? Мы имеем определенные входящие и уходящие частицы. Для простоты я рассмотрю только входящие и уходящие гравитоны. Я буду называть их гравитонами и мезонами, даже если они — векторные частицы. Первый вопрос, каков правильный ответ для гравитонов в виде плоских волн $A_1, A_2, A_3 \dots$ — входящих (положительные частоты A_1) и уходящих (отрицательные). Мы строим следующее поле. Обозначим A_{asym} α , умноженное на волновую функцию A_1 , плюс β на A_2 , плюс γ на A_3 ; и т. д.

$$A_{\text{asym}} = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 \dots, \quad A \rightarrow A_{\text{asym}}. \quad (12)$$

Затем вычисляется этот интеграл (11) при условии, что A стремится к A_{asym} на бесконечности. Результат будет функцией $\alpha, \beta, \gamma \dots$. Нам нужны члены первого порядка по $\alpha, \beta, \gamma \dots$, что означает по одному соответствующему гравитону на входе и выходе. Это правильная формула для регулярной теории, мезонной теории. Вычисляется интеграл с асимптотическим условием, и берутся в первом порядке теории возмущений входящие волны. Один и тот же фотон учитывается только один раз, фотон, действующий дважды, уже не является фотоном, это классическая волна. Берутся производные по α, β, γ и т. д. и приравниваются нулю. Это завершает построение. (В общем случае, может быть асимптотика и по φ).

Теперь обозначим A_0 величину A , удовлетворяющую классическим уравнениям движения, которые для данного случая выглядят как

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \right|_{A_0} + \mu^2 A^0 = 0. \quad (13)$$

Я решаю их при условии A_0 равно A_{asym} . Другими словами, я нахожу максимум или минимум действия в (11) при асимптотических условиях.

Следующий шаг — это простая подстановка $A = A_0 + B$ в уравнение (11). Мы получим \mathcal{L} от $A_0 + B$ (если B пренебрежимо мало, то берется \mathcal{L} от A_0), и далее:

$$e^{i[\mathcal{L}(A_0) + \mu^2 A_0 A_0]} \int e^{i[\mathcal{L}(A_0 + B) - \mathcal{L}(A_0)] + \mu^2 B B + 2\mu^2 A_0 B} DB. \quad (14)$$

Интегрирование идет по всем B , и B должно асимптотически стремиться к нулю. Это выражение можно разложить по степеням B :

$$\mathcal{L}(A_0 + B) - \mathcal{L}(A_0) + \mu^2 B B + 2\mu^2 A_0 B = \text{Quad}(B) + \text{Cubic}(B) + \dots + \mu^2 B B. \quad (15)$$

Член с нулевой степенью B , равен, очевидно нулю. Первая степень B также отсутствует, потому что A_0 минимизирует исходное выражение. Разложение начинается с квадратичного по B члена, далее идет кубический член и т. д. Квадратичный

член $\text{Quad}(B)$ зависит от A_0 , кубический включает A_0 в сложной, может быть очень сложной комбинации, но по B разложение начинается со второй степени.

Теперь надо заметить следующее. Первое — оказывается, что вклад первого члена (если забыть об интеграле) в точности равен вкладу всех деревьев в данной задаче. Таким образом классическое приближение связано с деревьями. Затем, если отбросить кубический член в экспоненте и проинтегрировать результат по DB , это будет соответствовать вкладу одного кольца или двух изолированных колец, или трех изолированных колец, но не пересекающихся петель. Если вводить кубический член, он войдет во второй степени благодаря четности и нечетности функций. Из-за второй степени мы имеем дважды тройное взаимодействие, что приводит к расходимости для двойного кольца. Поэтому, пока я работаю со вторым порядком $\text{Quad}(B) + \mu^2 BB$, я имею дело с вкладом одного кольца и основываюсь на деревьях. Я получаю правильное выражение для кольцевого вклада во всех порядках, независимо от того, сколько линий входит в диаграмму. Я также получаю выражения для вкладов деревьев и т. д. Я могу сравнивать их различными способами и на этой основе доказать все утверждения относительно соотношения одного кольца и деревьев.

Теперь я хочу пояснить, как получается теорема в случае массы и кольца. Мы обсуждаем кольцо, выражающееся формулой:

$$X = \int e^{(\text{Quad}(B) + \mu^2 B^2)} DB. \quad (16)$$

Квадратичная форма включает A_0 , так что ответ зависит от A_0 — это сложный функционал от A_0 . Я буду это иметь в виду. Нам надо интегрировать по всем B , и проблема в том, что квадратичная форма в B сингулярна, т. к. она появляется как часть действия, обладающего инвариантностью, и эта инвариантность продолжает преследовать нас. Существует определенное преобразование B , которое оставляет форму $\text{Quad}(B)$ неизменной в первом порядке. В теории Янга-Миллса это — преобразование:

$$\vec{B}'_\mu = \vec{B}_\mu + \vec{\nabla} \alpha + (\vec{\alpha} \times \vec{A}) = \vec{B}_\mu + \alpha_{,\mu}, \quad (17)$$

где векторы берутся в пространстве изотопических спинов, а α в первом порядке. Это преобразование оставляет $\text{Quad}(B)$ неизменным, поэтому оно сингулярно. При добавлении $\mu^2 BB$ и $\mu^2 \neq 0$ никаких проблем не возникает, пока мы не переходим к пределу $\mu^2 \rightarrow 0$.

Я нашел, что, если в настоящем лагранжиане сделать преобразование (17) и выполнить все операции до второго порядка, то оно точное, потому что это только второй порядок. Если проделать точную замену, то выражение становится инвариантным, оно инвариантно только в первом порядке по α . Но если проделать подстановку точно, то я получу определенную добавку в лагранжиан, другими словами лагранжиан от B' (включающее μ^2 , лагранжиан плюс μ^2 в B) т. е. лагранжиан плюс μ^2 , плюс нечто подобное:

$$\mu^2 B_\mu \cdot \alpha_{,\mu} + \frac{1}{2} \mu^2 \alpha_{,\mu} \alpha_{,\mu}.$$

Точка с запятой имеет тот же смысл, что и в теории гравитации. Она означает обычную производную от X минус A крест X , что является аналогом символов Кристоффеля. Я нашел, что происходит с L при преобразованиях. Теперь возникает идея, трюк, безумное предложение: вместо выписывания исходных членов, вместо исходного лагранжиана я пишу следующее:

$$\int e^{\mathcal{L}(B) + \frac{1}{2}(B_{\mu,\nu} - \alpha_{,\mu\nu} + \mu^2 \alpha)^2} \mathcal{D}\alpha DB.$$

Я утверждаю, что интеграл по α есть константа. Все что я сделал, это умножил мой исходный интеграл на \mathcal{L} от B (под этим я понимаю все выражение). Предположение о том, что интегрирование по α дает результат, не зависящий от B , не является тривиальным. При интегрировании по всем α не очевидна независимость результата от B , но после краткого анализа можно убедиться, что это так, потому что если я могу решить уравнение определенного типа, а именно $\alpha_{;\mu}^{\mu} - \mu^2 \alpha = B_{\mu}^{\mu}$, то я могу сместить значение α на эту величину, и этот член исчезнет. Иначе говоря, если я могу решить это и обозначить решение как α_0 , и заменить α на α_0 , то B будет исключено. Я проделал это довольно абстрактно, что немного легче объяснить, тогда добавленный мною член можно рассматривать как интеграл по B плюс оператор, действующий на α (этот сложный оператор состоит из второй производной и других выражений) по двойному $\mathcal{D}\alpha$. И после вышеупомянутой подстановки, это становится равным $1/2$ от оператора A , умноженного на α' , по двойному $\mathcal{D}\alpha$, что равно от интегралу e в степени половина α , умноженная на A , оператор A , умноженный на оператор A , на α , проинтегрированное по α прим. При интегрировании квадратичной формы, которая содержит подобный оператор, возникает корень квадратный из детерминанта оператора, т. е. выражение квадратично относительно детерминанта оператора AA , который есть квадрат детерминанта A . Мне удобней записать это через квадрат квадратного корня. Обозначим X неизвестный ответ, равный X , деленному на квадратный корень из детерминанта в квадрате. Теперь следует фокус — я заменяю B на B' . Вы видели, что эта замена неправильна, некорректна, но я ее делаю. Это означает добавление чего-то к B , что не меняет его дифференциала, а лишь смещает величину. Поэтому я везде делаю подобную замену и получаю с использованием формулы для \mathcal{L} от B' :

$$\mathcal{L}(B') = \mathcal{L}(B) + \mu^2 B_{\mu} \alpha_{\mu} + \frac{1}{2} \mu^2 \alpha_{,\mu} \alpha_{;\mu}.$$

Здесь содержится смешанный член, и другой смешанный член появляется при разложении. Окончательный результат, после некоторых преобразований, получается в форме \mathcal{L} от B , квадратичный член остается, присутствует половина от $B_{\mu,\mu}$ в квадрате; перекрестные члены уничтожаются, и мы получаем квадратичные по α члены:

$$\int e^{\mathcal{L}(B) + \frac{1}{2}(B_{\mu,\mu})^2} \mathcal{D}B e^{\frac{\mu^2}{2}(\alpha_{,\mu} + \mu^2 \alpha^2)} \mathcal{D}\alpha.$$

Теперь нужно провести интегрирование по α ; при этом еще одна удивительная вещь происходит: в выражение входит $\alpha A \alpha$, и результат выражается через детерминант, или квадрат этого интеграла равен детерминанту, или чему-то вроде того. Поэтому, если правильно взять все множители, то X равен

$$X = \left[\int e^{\mathcal{L}(B) + \frac{1}{2}(B_{\mu,\mu})^2} \mathcal{D}B \right] : \left[\int e^{\frac{\mu^2}{2}(\alpha_{,\mu} + \mu^2 \alpha^2)} \mathcal{D}\alpha \right].$$

Сачс: Я хочу спросить о далеко идущих надеждах. Может быть из иррациональных побуждений люди заинтересуются теми частями теории, в которых могут обнаружиться качественные различия: что означают координаты и топология в квантовой теории? Неужели вы думаете, что теория возмущений может быть применима, например, для такого рода вопросов?

Фейнман: Представленная теория неполна и не является теорией в строгом смысле слова. Я не даю универсальных решений. Я надеюсь, что уделив больше времени анализу трудностей и выводам, я смогу превратить ее в подобную теорию. Теперь Вы спрашиваете, сможет ли эта теория, в предположении, что она существует, дать ответ на эзотерический вопрос о квантовании гравитации. Конечно, ведь это

будет квантовая теория; в настоящее время не существует непротиворечивой квантовой теории. Вы скажете, что это теория возмущений. Но это не так. Я работал с ней, анализируя последовательные приближения со все возрастающей точностью, но только там, где решались конкретные задачи и делалась проверка. Но даже в этом случае я не смог сказать, сколько раз векторный потенциал A входил в диаграмму; не существует верхнего предела порядку внешних линий, участвующих в вычислении A . Если я применю мою общую теорему для всех порядков, я получу какую-то формулировку. Суть в том, что в таких теориях, как электродинамика, и в других невозможно было получить следствия квантовой теории поля для случая сильных взаимодействий из-за технических трудностей, которые не являются техническими только для гравитационной теории, но присущи всей квантовой теории поля. Я не думаю, что проблемы гравитации будут легче решаться здесь, чем в других полевых теориях, поэтому мало что могу сказать об этом. Но в конце концов обязательно будет сформулирована теория, по которой будут проведены вычисления и получены выводы, прежде чем она станет широко применяться. Я думаю, вы будете потрясены трудностями, возникающими всякий раз, когда какая-либо теория расходится. С другой стороны, если вы спрашиваете о физическом смысле квантования геометрии, или о философии связанной с ней, о том, что происходит с метрикой и т. п., то я думаю, они будут прояснены. Я думаю, вы сможете вывести из них физику, но я не думаю об этом, пока проблема полностью не сформулирована, я не хочу начинать работу до тех пор, пока я не знаю, какие уравнения я собираюсь анализировать. Но я не сомневаюсь, что вы сможете что-то сделать, потому что вы описываете явления, которые ожидаете встретить, и поэтому вы сможете найти язык для их понимания и описания.