

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ**О СФЕРИЧЕСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ В РТГ****А. В. Генк***Научно-образовательное объединение “Земля и Вселенная”, С.-Петербург, Россия*

Исходя из законов сохранения найдена зависимость энергии, переносимой сферической гравитационной волной (излучаемой центрально-симметричным телом при переходе между двумя статическими состояниями) от расстояния до источника. Обсуждается вопрос о наблюдаемости такой волны и знаке ее энергии.

С о д е р ж а н и е

1. Введение	83
2. Сохранение энергии и сферические волны в РТГ	84
3. О наблюдаемости сферической волны и знаке ее энергии	87
Литература	89

1. Введение

В рамках ОТО сферически-симметричное тело гравитационных волн не излучает в силу т.н. “теоремы Биркгофа”. Ранее считалось [1], что и в РТГ ситуация аналогична. Однако более внимательное рассмотрение этого вопроса показало [2, 10] что в РТГ смысл теоремы Биркгофа иной, чем в ОТО¹. В РТГ в заданных координатах пространства Минковского (ПМ) существуют нестатические центрально-симметричные вакуумные решения и этот факт с необходимостью приводит к представлению о сферических гравитационных волнах (справедливости ради следует отметить, что такая точка зрения отнюдь не является общепринятой даже среди сторонников РТГ). Однако, если исходить из внутренней логики теории, то существование сферических гравитационных волн в РТГ совершенно естественно: ковариантное условие $D_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$ появляется в теории [1] как условие, выделяющее два спиновых состояния гравитационного поля 0 и 2. Иначе говоря, в основаниях РТГ никаких запретов на существование скалярных сферических волн нет.

¹Впрочем, и в ОТО с теоремой Биркгофа далеко не все ясно, поскольку, как оказалось, никакой единственности внешнего решения даже в статическом случае нет — см. [16], а в классе функций C^1 могут быть и нестатические решения, что отмечал еще Петров [17], (см. также [2]).

В данной работе мы попытались показать существование центрально-симметричных волн на основе нескольких бесспорных (как нам представляется) положений, а именно:

Положение I. Гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью, не превышающей скорости света в вакууме.

Положение II. В пространстве Минковского корректно формулируется понятие энергии гравитационного поля и строго выполняется закон сохранения полной энергии системы, включая и гравитационную энергию.

Положение III. Статическое гравитационное поле сферически-симметричного тела в РТГ определяется обобщенным гармоническим интервалом, содержащем константу, пропорциональную полной массе (радиусу) тела.

Положения I и II в особых комментариях не нуждаются. Остановимся подробнее на положении III. Ранее [1] в РТГ в качестве точного статического центрально-симметричного внешнего решения рассматривалась метрика Фока [3]:

$$ds^2 = \frac{r-m}{r+m} dt^2 - \frac{r+m}{r-m} dr^2 - (r+m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Однако, как указывалось в ряде работ [4–7], точным статическим внешним решением РТГ с безмассовым гравитоном является не метрика (1), а более общая метрика [2, 4, 14], имеющая вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 - \frac{1}{(1 - 2m/\rho)(dr/d\rho)^2} dr^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2)$$

где функция $\rho(r)$ задается неявно, через обратную функцию $r(\rho)$:

$$r(\rho) = C_1(\rho - m) + C_2 \left[\frac{m/\rho - 1}{2m/\rho} \ln(1 - 2m/\rho) - 1 \right]. \quad (3)$$

Константа C_2 в (3) имеет размерность длины: $C_2 = -Km = -\bar{K}r_s$ (r_s — радиус тела). Интервал Фока (1) является частным случаем метрики (2), соответствующим выбору $C_2 = 0$ в (3) ($C_1 = 1$ из асимптотических условий). Далее мы будем рассматривать только случай $C_2 < 0$, когда соответствие координат r и ρ будет взаимнооднозначным (хотя в общем случае рассматривается и возможность $C_2 > 0$ [6]). Константа C_2 определялась (в рамках ОТО в гармонических координатах) в [7, 8] шивкой с внутренним решением, и действительно приводила к $C_2 < 0$ и $\bar{K} \cong 12/35$ (для тела из идеальной жидкости в [7]) и $\bar{K} \cong 0.4$ (для сверхплотных звезд в [8]). Важно отметить, что величина K при фиксированном m зависит от распределения плотности внутри тела и его радиуса, а через (3) она определяет и внешнюю метрику (2). Ниже мы придем к представлению о сферической гравитационной волне, как это ни парадоксально, именно на основании точного статического решения (2) и положений I и II [14].

2. Сохранение энергии и сферические волны в РТГ

Как известно [1], в РТГ выполняется ковариантный закон сохранения энергии-импульса вещества и поля в ПМ: $D_\mu(t_M^{\mu\nu} + t_G^{\mu\nu}) = 0$, где $t_M^{\mu\nu}$, $t_G^{\mu\nu}$ — симметричный тензор энергии-импульса материи и гравитационного поля, равный $t^{\mu\nu} = (1/16\pi G)\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta(\sqrt{g/\gamma}g^{\mu\nu})$. В случае, когда через выделенную поверхность интегрирования нет потоков вещества и гравитационного поля, из дифференциального закона следует сохранение полного 4-импульса системы $P^\beta = \int (t_M^{0\beta} + t_G^{0\beta}) dv$. Для

статического поля (1), (2) отсюда получаем [1, 9] выражение для инертной массы тела P^0 , которая оказывается равной его гравитационной массе m ($dv \equiv \sqrt{-\gamma} d^3x$):

$$m = \int_0^\infty (t_M^{00} + t_G^{00}) dv = \int_0^{r_s} (t_M^{00} + t_G^{00}) dv + \int_{r_s}^\infty t_G^{00} dv. \quad (4)$$

Отметим, что гравитационная масса тела (4), определяющая метрику (2) на любом конечном расстоянии r , дается интегралом от t^{00} по всему пространству, а не по шару радиуса r . Преобразуя 1-й интеграл в (4) в поверхностный, получаем выражение для m в виде [9]:

$$m = \frac{1}{16\pi G} \oint_{r_s} Q^k dS_k + \int_{r_s}^\infty t_G^{00} dv. \quad (5)$$

где $Q^k \equiv \partial_i(\sqrt{-g}g^{00})\gamma^{ik}$ (в декартовых координатах ПМ).

Пусть тело первоначально было статическим, и имело радиус r_{s1} . Оно создавало внешнюю метрику (2) во всем пространстве $r > r_{s1}$ с некоторой константой $K_1 = \bar{K}_1 r_{s1}/m$. Пусть затем тело перешло в нестатическое состояние, а спустя время τ вновь стало статическим, но уже, вообще говоря, с другим распределением плотности и радиусом r_{s2} . Причины и конкретные характеристики этого перехода для нас здесь значения не имеют; важно только, что перестройка тела произошла за счет внутренней его энергии без вмешательства извне.² Потерями энергии системы, связанными с электромагнитным излучением в процессе изменения конфигурации мы пренебрегаем. В новом статическом состоянии тело также должно создавать внешнее поле (2), но уже с другой константой $K_2 = \bar{K}_2 r_{s1}/m$ (если при этом, например, распределение плотности по радиусу не изменилось, то $\bar{K}_1 = \bar{K}_2$ и $K_2 = K_1 r_{s2}/r_{s1}$). Изменение константы K в (3) означает изменение метрики (2) (разумеется, в исходных координатах ПМ), причем метрика должна измениться во всем пространстве $r > r_{s2}$. Однако она не может в релятивистской теории измениться мгновенно всюду вне тела (исходное положение I). Единственная возможность избежать противоречия — предположить существование сферического возмущения (волнового фронта), движущегося в пространстве и отделяющего “старую” и “новую” метрики (2). Нестатическая волновая метрика возникает и формируется в течение времени τ нестатичности тела. Использование закона сохранения энергии (положение II) позволяет резко упростить задачу и получить общий результат, не зная деталей промежуточного нестатического состояния тела и конкретного вида волнового решения. Видимо, волновой фронт движется со скоростью света; тогда ширина фронта по порядку величины равна $\Delta \cong c\tau$ (конкретное значение Δ нам опять-таки не понадобится).

Введем далее независимый постулат (*положение IV*) о свойствах подобных сферических возмущений поля, отличающих их от общеизвестных квадрупольных волн в ОТО и РТГ. А именно, мы предполагаем, что поток энергии волны (возмущения) зануляется на пространственной бесконечности. Другими словами, мы предполагаем, что полная гравитационная масса системы (4), т. е. константа m , входящая в определение метрики (2), (3), не изменяется при распространении

²Приведем наглядные примеры подобных переходов: а) взрыв в центре твердого тела с образованием сферической полости за счет сжатия внешних слоев; б) фазовый переход внутри тела с изменением плотности; в) коллапс тела (например звезды) за счет срыва устойчивости в новое устойчивое состояние и т. д.

такого возмущения. При этом, разумеется, на любом конечном расстоянии от источника поток энергии волны (возмущения) отличен от нуля, но только плотность энергии поля волны достаточно быстро убывает с расстоянием. Предположение постоянства гравитационной массы системы отнюдь не означает постоянства полной энергии внутри тела. Напротив, как будет видно из дальнейшего, именно изменение энергии вещества и поля внутри тела в результате изменения его конфигурации оказывается равным исходной энергии волны (возмущения), которая затем по мере распространения идет на изменение энергии внешнего статического поля. Гравитационная же масса системы (4) определяется полной энергией вещества и поля во всем пространстве, которая по предположению не меняется. Здесь можно привести наглядную аналогию со звуковой (ударной) волной в среде — ее энергия постепенно рассеивается за счет вязкости в окружающем источнике пространстве, а полная энергия во всем пространстве (если пренебречь излучением) постоянна. В данном случае роль “среды” играет статическое гравитационное поле в пустоте, обладающее в ПМ вполне определенной (в рамках РТГ) энергией, а роль вязкости — нелинейность уравнений поля, благодаря которой в зоне фронта происходит изменение энергии поля. Также как и в газодинамике, энергию, переносимую возмущением, можно найти из закона сохранения полной энергии, не рассматривая сложные процессы диссипации внутри самого фронта. Наш итоговый результат согласуется с исходным положением IV — найденный поток энергии возмущения действительно зануляется при $r \rightarrow \infty$, что и доказывает существование сферических волн такого типа. Конечно, в рамках нашего рассмотрения нельзя ответить на вопрос — могут ли существовать сферически-симметричные волны, уносящие на бесконечность ненулевую энергию. По нашему мнению, таких волн не существует — (см. замечание в конце статьи); такой же вывод был сделан и в работе [10].

Запишем выражение для m в некоторый момент времени, когда задняя граница волнового фронта находится на расстоянии r_Φ , от центра тела, и приравняем его к (4) ($t_G^{00} \equiv \omega$; индексы ^{1,2} нумеруют начальное и конечное состояние тела):

$$\frac{1}{16\pi G} \oint_{r_{s1}} Q_1^k dS_k + \int_{r_{s1}} \omega_1 dv = \frac{1}{16\pi G} \oint_{r_{s2}} Q_2^k dS_k + \int_{r_{s2}} \omega_2 dv + \int_{r_\Phi}^{r_\Phi+\Delta} \omega_\Sigma dv + \int_{r_\Phi+\Delta}^{\infty} \omega_1 dv. \quad (6)$$

Плотность энергии поля внутри области Δ можно по-определению, представить в виде $\omega_\Sigma = \omega_1 + \omega_{\text{волн}}$. Обозначая $\int_{r_\Phi}^{r_\Phi+\Delta} \omega_{\text{волн}} dv \equiv E_{\text{в}}$, из (6) получаем:

$$E_{\text{в}} = \frac{1}{16\pi G} \left[\oint_{r_{s1}} Q_1^k dS_k - \oint_{r_{s2}} Q_2^k dS_k \right] + \int_{r_{s1}}^{r_\Phi} \omega_1 dv - \int_{r_{s2}}^{r_\Phi} \omega_2 dv. \quad (7)$$

По условию, должно выполняться $E_{\text{в}} \rightarrow 0$ при $r_\Phi \rightarrow \infty$. Из (7) тогда получаем:

$$\frac{1}{16\pi G} \left[\oint_{r_{s1}} Q_1^k dS_k - \oint_{r_{s2}} Q_2^k dS_k \right] = \int_{r_{s2}}^{\infty} \omega_2 dv - \int_{r_{s1}}^{\infty} \omega_1 dv. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), для полной энергии волны получаем простое выражение:

$$E_{\text{в}}(r_\Phi) = \int_{r_\Phi}^{\infty} (\omega_2 - \omega_1) dv, \quad (9)$$

где [4]

$$m^2\omega = -\frac{1}{16\pi G} \varphi^4 \partial_\varphi \left(\partial_\varphi (\sqrt{g/\gamma} g^{00}) \right); \quad \varphi \equiv m/r. \quad (10)$$

Разлагая (2), (3) в ряд по $\varphi \ll 1$ с точностью до членов порядка φ^4 включительно и подставляя в (10), можно получить следующее разложение для плотности энергии поля:

$$m^2\omega = -\frac{\varphi^4}{16\pi G} \left(14 + 48\varphi + (96 - 16K)\varphi^2 + \dots \right). \quad (11)$$

Из (9), (11) в итоге приходим к выражению полной энергии слабой сферической гравитационной волны ($m = GM$):

$$E_{\text{в}}(r_{\Phi}) = \frac{4}{3G} (K_2 - K_1) \frac{m^4}{r_{\Phi}^3} = \frac{4}{3G} (\bar{K}_2 r_{s2} - \bar{K}_1 r_{s1}) \frac{m^3}{r_{\Phi}^3}. \quad (12)$$

Усредненная плотность энергии поля волны при этом равна $\langle \omega_{\text{в}} \rangle = E_{\text{в}}/4\pi r_{\Phi}^2 \Delta$ (при $\Delta \ll r_{\Phi}$). Еще раз подчеркнем, что (12) является просто следствием закона сохранения энергии: изменение K в (3) приводит к изменению метрики (2) и энергии поля (11) в области $r < r_{\Phi}$; это изменение происходит за счет энергии волны (9), (12), сосредоточенной в некоторой области толщиной Δ . Наиболее отчетливо все это видно, если в (9), (12) положить $r_{\Phi} = r_{s2}$ (считая $r_{s2} > r_{s1}$), т. е. задняя граница волнового фронта еще на поверхности тела. Тогда стартовое значение $E_{\text{в}}(r_{s2})$ энергии волны (12) равно будущему изменению (9) энергии поля (11) во всем пространстве вне тела $r_{s2} < r < \infty$. В свою очередь, это стартовое значение энергии волны оказывается, как это следует из (4), (7), равным изменению полной энергии материи и поля внутри сферы $r = r_{s2}$.

3. О наблюдаемости сферической волны и знаке ее энергии

Обсудим физический смысл выражения (12) для энергии сферической гравитационной волны. Представляет интерес два случая: 1) $K_2 > K_1$ и 2) $K_2 < K_1$. Первый случай соответствует $r_{s2} > r_{s1}$ (по крайней мере если $\bar{K} = \text{const}$ т.е. вид функции распределения плотности по радиусу не изменился), хотя в принципе возможна и ситуация $r_s = \text{const}$, но $\bar{K}_2 > \bar{K}_1$ за счет перераспределения массы от центра тела к его поверхности; или смешанные варианты. В этом случае мы всегда имеем либо явное, либо “эффективное” расширение тела. Аналогично, случай $K_2 < K_1$ соответствует или явному, или “эффективному” сжатию тела. Из (12) следует, что при $K_2 > K_1$ энергия (и импульс), переносимые волной положительны, а при $K_2 < K_1$ — отрицательны (в отличие от газодинамики, здесь энергия “среды” позади фронта может как возрасти, так и уменьшится). Отрицательность энергии волны в последнем случае не ведет ни к каким противоречиям и имеет ясный физический смысл. Если волна с $E_{\text{в}}, P_{\text{в}} > 0$ сообщает пробной частице дополнительный импульс по направлению своего распространения (от центра) то волна с $E_{\text{в}}, P_{\text{в}} < 0$ — против этого направления (к центру).

В работе С.Н. Соколова [13] был сделан вывод о физической неприемлемости отрицательного знака энергии частиц или волн, в т. ч. и гравитационной энергии. В качестве аргумента приводилось наглядное рассуждение о рассеянии частиц (волн) с отрицательной массой (энергией) на обычной материи, что на первый взгляд приводит к возможности неограниченного нарастания энергии и импульса обычной материи и самой волны после многократных рассеяний. Этот неприятный результат кажется автору [13] неизбежным и в рамках РТГ с безмассовым гравитоном, а выход, предлагаемый в [13], состоит в признании неоднозначности соответствия

пространств Римана и Минковского в нестатическом случае, что приводит к неопределенности знака гравитационной энергии.

С нашей точки зрения, этот вывод [13], — если понимать его как самое общее утверждение (“теорему”), в принципе запрещающее существование в РТГ (или в другой теории) волновых пакетов с $E < 0$, — неверен³. Сферические волны представляют собой исключение (единственное или нет — это отдельный, пока неясный вопрос), для которых отрицательный знак энергии (возможный, как показано выше, в случае сжатия тела) не приводит ни к каким противоречиям или парадоксам. Чтобы убедиться в этом, достаточно более внимательно рассмотреть этот процесс. Прежде всего очевидно, что в случае уединенной пробной частицы вообще не может быть многократного взаимодействия с данным сферическим фронтом — он просто проходит через частицу, гравитационный потенциал изменяется и сила ее притяжения к центру увеличивается (что может быть экспериментально обнаружено — см. ниже). При этом пробная частица по определению не меняет параметров волны, а изменение энергии частицы определяется изменением гравитационного потенциала (амплитудой волны) и начальными условиями.

Если мы хотим рассмотреть возможность изменения энергии самой волны, то необходимо вместо точечной частицы рассматривать сферический слой уже не бесконечно-малой (по отношению к центральному телу) массы δm_s , дающий вклад во внешнее поле всей системы. Многократное взаимодействие можно осуществить только, если мы рассмотрим множество таких слоев $\delta m_{s1}, \delta m_{s2}, \dots$ ⁴. Возможно ли при этом неограниченное нарастание амплитуды волны и энергии, приобретаемой слоями? По нашему мнению ответ очевиден — разумеется нет, если только полная масса слоев конечна. Каждый последующий слой будет, разумеется, увеличивать амплитуду волны, поскольку после прохождения фронта он начнет двигаться к центру, и тем самым *уменьшать* коэффициент K системы, состоящей из центрального тела и всех предыдущих внутренних слоев. Однако конечная амплитуда выходящей волны определяется всегда полной массой всей системы и итоговым изменением конфигурации, которое определяет эффективное изменение коэффициента $K_{\text{эф}}$ системы. Поскольку предельное (снизу) конечное значение $K_{\text{эф}}^{(2)}$ — это $K_{\text{эф}}^{(2)} = 0$ (сжатие всей системы в “точку”), то предельное значение конечной амплитуды волны — это $E_{\text{в}} = -(4/3G)K_{\text{эф}}^{(1)}(M^4/r_{\text{ф}}^3)$, где M — полная масса всей системы из центрального тела и всех внешних слоев, а $K_{\text{эф}}^{(1)}$ — начальное значение коэффициента K системы. Иначе говоря, взаимодействие исходной волны с внешними слоями — это некоторый сложный внутренний процесс в системе, итог которого всегда можно найти из закона сохранения энергии рассмотренным выше методом, если принять положения I–IV и допустить, что начальное и конечное состояния системы-статические.

Поясним сказанное на языке силового воздействия поля. Сила, действующая на покоящуюся пробную частицу в постоянном поле равна [11]: $F_{\text{гп}} = -\text{grad} \ln \sqrt{g_{00}}$. Используя выражение метрики (2), (3) и разлагая в ряд по φ , получаем:

$$F_{\text{гп}} \cong \frac{m}{r^2} \left(1 + \varphi^2 - \frac{4}{3} K \varphi^3 + \dots \right). \quad (13)$$

Из (13) видно, что увеличение K (после прохождения фронта волны) приводит к уменьшению силы притяжения (это случай $E_{\text{в}} > 0$), а уменьшение K — к уве-

³Отрицательный знак энергии гравитонов допускается и в теории, предложенной Белинфанте и Свихартом [15]. Противоречия в теории при этом не будет, если взаимодействие гравитонов с $E < 0$ с веществом достаточно слабо.

⁴Гравитационное поле вообще и сферическую волну в частности в принципе нельзя — в отличие от обычной материи — ни экранировать, ни запереть “зеркалами” в ограниченном объеме.

личению этой силы (случай $E_b < 0$). Это изменение $F_{гр}$ в обоих случаях может быть зафиксировано, т. е. волна как с $E_b > 0$, так и с $E_b < 0$ наблюдаема. Поскольку константа K в (3) входит в выражения всех классических наблюдаемых эффектов [12], то изменение K при прохождении волны принципиально возможно зафиксировать по движению света или частиц в метрике (2).

Рассмотрим также еще один простой мысленный эксперимент. Пусть два заряженных пробных тела $(+q_1, -q_2)$ находятся на расстоянии l друг от друга на одной прямой с центром. Ближайший к телу заряд q_1 в исходном состоянии находится в равновесии: сила $F_{гр}$ (13) равна $F_{эл} = kq_1q_2/\varepsilon l^2$, где $\varepsilon = 1/\sqrt{g_{00}}$ — эффективная “диэлектрическая проницаемость” вакуума в гравитационном поле [11]. Заряд q_2 также удерживается в равновесии некоторой сторонней силой. Пусть теперь волна проходит через заряд q_1 , причем ширина фронта $\Delta \ll l$. При этом сила $F_{гр}$ (13) изменяется в 3-ем порядке по φ , а $F_{эл}$ — в 4-ом (за счет изменения ε ; изменение l при $\Delta \ll l$ сколь угодно мало). В результате равновесие заряда q_1 нарушается: при увеличении K (случай $E_b > 0$) заряд q_1 удаляется от центра и сталкивается с q_2 , а при уменьшении K (случай $E_b < 0$) заряд q_1 падает на центр. Результат опыта таким образом абсолютен — он не зависит от таких-либо координат, способов измерений и т. д.

Отметим, что энергия волны, находящейся на расстоянии r_f от центра, дается *интегралом* (9) по всему *внешнему* пространству. Это косвенно подтверждает другой вывод работы [13] (хотя он и относится к квадрупольным волнам) о том, что точные решения для гравитационных волн содержат интегральные члены и тем самым не допускают стандартный анализ ОТО путем разложения по степеням $1/r$ с учетом только 1-х членов — требуется рассмотрение исходных точных волновых решений или разложения более высоких порядков (как в нашем случае переход от (9) к (12) потребовал разложения $\sim \varphi^4$). С другой стороны, тот факт, что энергия волны не выражается через локальный тензор кривизны, а дается интегралом — по нашему мнению не означает нарушения принципа причинности [13], поскольку сама волна распространяется с конечной скоростью.

В заключение еще одно замечание. На первый взгляд кажется, что существование продольных сферических гравволн противоречит общеизвестному и в ОТО [11], и в РТГ [1] выводу о поперечности слабой плоской волны, несовместной со сферической симметрией задачи. Однако на самом деле противоречия здесь нет. Все дело в том, что вывод о поперечности волны не является строгой теоремой, он справедлив только в линейном приближении теории без учета отклонений от плоской симметрии. Поэтому этот вывод можно строго применить здесь только асимптотически, при $r \rightarrow \infty$, откуда следует лишь, что сферических волн, уносящих на бесконечность энергию, не существует (что уже отмечалось выше). С учетом же поправок на сферичность и нелинейных эффектов высших порядков (не говоря уже о сильном поле) доказательство поперечности не проходит, что и приводит к возможности существования продольных скалярных сферических волн. Естественно, что любой анализ свойств таких волн можно проводить только исходя из точных решений (именно так мы и действовали выше), а не из решений, найденных в линейном приближении теории. Автор благодарит М.А.Мествиришвили за обсуждение и замечания, и С.Н.Соколова за дискуссию на семинаре ИФВЭ (Протвино).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивитская теория гравитации, М.: Наука, 1989.
2. Генк А.В. // Проблемы физики высоких энергий и теории поля. (Труды XII семинара), М.: Наука, 1990, С. 20–32; // ТМФ, 1991, Т. 88, № 2, С. 272–285.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955.

4. Генк А.В. // ТМФ, 1989, Т. 79, С. 473–479; ТМФ, 1991, Т. 87, № 1, С. 130–140; Гравитация, 1995, Т. 1, Вып. 1, С. 50–58.
5. Соколов С.Н. Препринт ИФВЭ, ОТФ, № 89–117. Серпухов: ИФВЭ, 1989.
6. Карабут П.В., Чугреев Ю.В. // ТМФ, 1990, Т. 84, № 3, С. 474–480.
7. Унт В.А. // Известия вузов. физика, 1961, № 4, С. 3–8; Препринт АН ЭССР, ОФА, N A-4. Таллин, 1987.
8. Авакян Р.М. // Точные решения уравнений Эйнштейна и их физическая интерпретация. Тарту: Из-во Тартусского ун-та, 1988, С. 22–23.
9. Генк А.В. Релятивистская теория гравитации с линейным уравнением связи. Депон. в ВИНТИ, № 5982–В87. М.: ВИНТИ, 1987.
10. Власов А.А. // Вестник МГУ, Сер. 3, физика. Астрономия, 1990, Т. 31, № 1, С. 86–87.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
12. Генк А.В. // ТМФ, 1991, Т. 86, С. 142–156; Т. 87, № 3, С. 130–140; Т. 88, № 1, С. 122–134; Гравитация, 1995, Т. 1, Вып. 1, С. 50–58.
13. Соколов С.Н. // Гравитация, 1995, Т. 1, Вып. 1, С. 3–12.
14. Генк А.В. // Проблемы физики высоких энергий и теории поля (Труды XIV семинара). М.: Наука, 1992, С. 64–70; ТМФ, 1992, Т. 91, N 2, С. 346–352.
15. Belinfante F.J., Swihart J.C.. // Ann. Phys. V. 1 1957, P. 168.
16. Захаров В.Д., Коноплева Н.П., Савушкин О.В.. // ДАН, т. 326 N 6, 1992, С. 1002–1006.
17. Петров А.З.. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. N 5. С. 1525–1533; уч. зап. Казанск. гос. ун-та. 1963. Т. 123. Кн. 2. С. 61–69; кн. 12. С. 21–29.