

ТЕРМОДИНАМИКА САМОГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ ПОЛИТРОП

Ощепков С.А., Райков А.А., Сергеев А.Г.

На основании выражений для гравитационной и внутренней энергии ограниченной самогравитирующей политропной конфигурации, полученных в работе [2] проанализировано употребление понятия теплоемкости применительно к самогравитирующим системам.

С о д е р ж а н и е

1. Введение	66
2. Энергия политропы	67
3. Коэффициент трансформации энергии	68
4. Заключительные замечания	70
Литература	70

1. Введение

В рамках классической термодинамики физические величины разделяются на интенсивные и экстенсивные. Интенсивные величины характеризуют состояние вещества в системе, их значения в равной мере относятся как ко всей (термодинамически равновесной) системе в целом, так и к любой ее подсистеме. Экстенсивные величины пропорциональны количеству вещества в системе, их значения характеризуют конкретную выбранную систему (подсистему). При рассмотрении неоднородных (но равновесных) систем интенсивные величины становятся функциями координат, а экстенсивные — интегралами соответствующих интенсивных:

$$E = \int e dV, \quad C = \int c dM, \quad S = \int s dV. \quad (1)$$

К рассмотрению многих термодинамически неравновесных систем применимо представление о локальном термодинамическом равновесии. Различие между интенсивными и экстенсивными величинами при этом остается прежним, но неоднородность температуры ведет к потерям в рядах экстенсивных величин. Так, вообще говоря, теряет смысл понятие теплоемкости системы, поскольку неясно, к изменению какой температуры относить подводимую к системе энергию. Даже постоянство локальной теплоемкости по всей системе не дает еще возможности ввести теплоемкость системы как целого.

При переходе к самогравитирующим системам мы продолжаем нести потери. На этот раз теряет смысл само разделение термодинамических величин на интенсивные и экстенсивные, т. к. зависимость традиционно экстенсивных величин от количества вещества делается нелинейной. По этой причине становится более уместным говорить о разделении величин на локальные, характеризующие бесконечно малый элемент системы, и нелокальные, характеризующие интегральные свойства всей системы или подсистемы оговоренной конфигурации. При таком разделении соотношения между локальными величинами остаются теми же, что и в классической термодинамике, в то время как соотношения между нелокальными величинами нуждаются в специальном исследовании, учитывающем дальнедействующий характер гравитационного взаимодействия.

В настоящей работе аналитически исследуется соотношение между полной (нелокальной) и внутренней энергиями ограниченной по радиусу политропной конфигурации в процессе подвода/отвода тепла. На основании полученного результата дается интерпретация распространенного утверждения об отрицательной теплоемкости самогравитирующих систем.

2. Энергия политропы

Будем рассматривать классическую (изоэнтропическую) политропную газовую конфигурацию, ограниченную сферической жесткой изолирующей перегородкой радиуса R . Политропное уравнение состояния имеет вид [1, стр. 283]:

$$w = np = nK\rho^{1+1/n}, \quad (2)$$

где w — плотность энергии, n — индекс политропы, K — константа (т. н. политропная температура). Строение политропных конфигураций удобно рассматривать перейдя к безразмерным переменным Эмдена ξ и $\vartheta(\xi)$ по формулам:

$$\rho = \rho_c \vartheta^n(\xi), \quad (3a)$$

$$R = \alpha \xi, \quad (3b)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{4\pi G} K \rho_c^{1/n-1}}. \quad (3c)$$

В работе [2], получены выражения для потенциальной и внутренней энергии ограниченной политропной конфигурации:

$$W(\xi) = \frac{n(n+1)}{5-n} 4\pi\alpha^3 K \rho_c^{1+1/n} \left[\vartheta'(\xi\vartheta' + \vartheta) + \frac{2}{n+1} \xi\vartheta^{n+1} \right] \xi^2, \quad (4a)$$

$$U(\xi) = -\frac{3n(n+1)}{5-n} 4\pi\alpha^3 K \rho_c^{1+1/n} \left[\vartheta'(\xi\vartheta' + \vartheta) + \frac{1}{3} \xi\vartheta^{n+1} \right] \xi^2. \quad (4b)$$

Полная энергия такой политропной конфигурации радиуса R соответственно будет:

$$E(\xi) = -\frac{1}{5-n} 4\pi\alpha^3 K \rho_c^{1+1/n} [(3-n)(n+1)\vartheta'(\xi\vartheta' + \vartheta) + (n-1)\xi\vartheta^{n+1}] \xi^2. \quad (4c)$$

В размерных обозначениях:

$$W = \frac{n}{5-n} \left[\frac{GM^2}{R} - (n+1) \frac{P}{\rho} M + 6PV \right], \quad (5a)$$

$$U = -\frac{3}{5-n} \left[\frac{GM^2}{R} - (n+1) \frac{P}{\rho} M + (n+1)PV \right], \quad (5b)$$

$$E = W + U = -\frac{3-n}{5-n} \left[\frac{GM^2}{R} - (n+1) \frac{P}{\rho} M + \frac{3(n-1)}{3-n} PV \right], \quad (5c)$$

где M , R и V — соответственно масса, радиус и объем рассматриваемой конфигурации, а ρ и P — плотность и давление на ее границе. Как и следовало ожидать, полученные выражения для W и U удовлетворяют теореме вириала [3, стр. 363]:

$$U + \frac{3}{n} W = 3VP, \quad (6)$$

Решая уравнения $E(\xi) = 0$ и $dE/d\xi = 0$ для различных показателей политроп, можно найти радиусы ξ_0 и ξ_m , на которых полная энергия политропной конфигура-

Таблица 1.

№	ξ_1	ξ_m	ξ_m/ξ_1	ξ_0	ξ_0/ξ_1	ξ_a	ξ_a/ξ_1
0.0	2.4490	0.6000	0.0000	—	2.0000	2.4490*	1.0000*
0.5	2.7527	0.9459	0.3434	1.2371	0.4993	2.7351	0.9936
1.0	3.1415	1.1656	0.3710	1.5708	0.5000	2.9513	0.9394
1.5	3.6537	1.3167	0.3603	1.8596	0.5090	3.0763	0.8420
2.0	4.3528	1.4539	0.3339	2.2107	0.5079	3.1372	0.7207
3.0	6.8968	1.7670	0.2562	6.8968	1.0000	1.3427*	0.4557*
4.0	14.9720	2.2770	0.1521	—	—	—	—

*Предельное значение

ции равна нулю и достигает максимума соответственно. Значения ξ_0 , ξ_0/ξ_1 , ξ_m/ξ_1 (где ξ_1 — первый корень уравнения Лейна-Эмдена) для различных показателей политропы приведены в Таблице 1.

3. Коэффициент трансформации энергии

При подводе энергии состояние рассматриваемой ограниченной политропы меняется однозначным образом. Отсюда возникает желание найти величину, характеризующую изменение состояния политропы в ответ на малое добавление энергии. В классической термодинамике равновесных систем для этого использовалась теплоемкость. Однако, как отмечалось во введении, для неравновесных систем корректно ввести понятие теплоемкости нельзя.

Чтобы найти приемлемую замену, обратим внимание, что в термодинамике равновесных систем температура однозначно связана с внутренней энергией:

$$dW = C_V dT, \quad \delta Q = dW + \delta A = C dT, \quad (7)$$

откуда коэффициент трансформации подводимого тепла во внутреннюю энергию

$$f \equiv \frac{dQ}{\delta W} = \frac{C dT}{C_V dT} = \frac{C}{C_V}. \quad (8)$$

Преимущество коэффициента трансформации перед теплоемкостью состоит в независимости его определения от температуры, что позволяет употреблять его для описания неравновесных систем, причем в равновесном случае он представляет собой теплоемкость, выраженную в единицах теплоемкости при постоянном объеме.

Чтобы определить коэффициент трансформации для политропы необходимо рассмотреть процесс отвода от нее энергии δQ (напоминаем, что система ограничена жесткой оболочкой). Согласно первому началу термодинамики, в отсутствие работы внешних сил

$$\delta Q = dE = dW + dU. \quad (9)$$

Как видно из формул (8) и (9), политропная конфигурация характеризуется четырьмя параметрами ξ , α , K и ρ_c . Одно уравнение связи дает формула (3с), другое

получается из (3b) с учетом условия постоянства объема (радиуса) конфигурации, третье уравнение связи можно получить из выражения для массы ограниченной конфигурации (см. [4, стр. 135])

$$M(\xi) = -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/(2n)} \xi^2 \vartheta' \quad (10)$$

и условия постоянства массы конфигурации. С учетом этих связей, выражения для энергии (4) можно рассматривать как функции единственного параметра, в качестве которого удобнее всего выбрать ξ , что дает возможность получить выражение для $f_n(\xi)$:

$$f_n(\xi) = \frac{dE}{dW} = \frac{dE}{d\xi} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{n-3}{n} \left[1 + \frac{5-n}{1-n+(n+1)(3-n) \frac{\vartheta'}{\vartheta^n \xi} \frac{\vartheta^{n+1} \xi + \vartheta \vartheta' + \vartheta'^2 \xi}{2\vartheta^{n+1} \xi + 4\vartheta \vartheta' + (n+1)\vartheta'^2 \xi}} \right]^{-1}. \quad (11)$$

На рис. 1 приведены графики зависимостей $f_n(\xi)$ для различных показателей политропы n . Точки разрыва ξ_a соответствуют политропным конфигурациям, у которых изменение полной энергии происходит исключительно за счет перестрой-

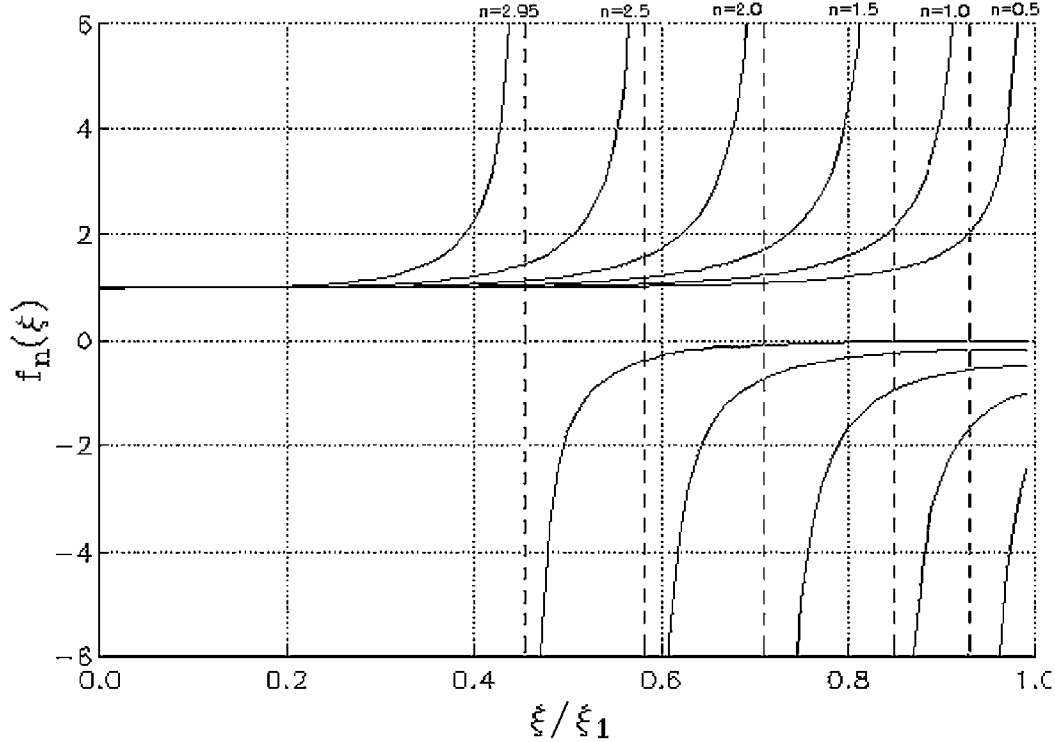


Рис. 1. Коэффициент трансформации энергии.

ки внутренней структуры при сохранении запаса тепловой энергии. Значения ξ_a также приведены в Таблице 1. Внутри радиуса ξ_a коэффициент трансформации положителен и при малых ξ стремится к единице, что соответствует незначительности гравитационных эффектов при малых размерах системы. При $\xi_a < \xi \leq \xi_1$ коэффициент трансформации отрицателен, что с учетом соотношения $C = fC_V$,

справедливого для равновесных систем, дает повод говорить об отрицательной теплоемкости самогравитирующих систем.

4. Заключительные замечания

Политропная конфигурация может быть термодинамически равновесной только в случае уравнения состояния, не зависящего от температуры, что реализуется, например, в моделях белых карликов. Во всех остальных случаях политропная конфигурация термодинамически неравновесна, и, следовательно, понятие теплоемкости к ней неприменимо. В частности, если вещество политропы является идеальным газом, то температура пропорциональна значению $\vartheta(\xi)$, что порождает поток энергии из центральных областей наружу.

Тем не менее, часто можно встретить утверждение, что звезда (политропа из идеального газа) как целое обладает отрицательной теплоемкостью: «Превышение энерговыделения над теплоотводом приводит к уменьшению температуры звезды. В этом смысле можно говорить об отрицательной теплоемкости звезды» [1, стр. 272]. Как было отмечено, корректнее говорить об отрицательном коэффициенте трансформации подводимой к политропе энергии во внутреннюю энергию вещества политропы. Впрочем, учитывая устойчивую тенденцию отождествлять при грубых оценках температуру и внутреннюю энергию, можно согласиться с прежним словопотреблением и говорить об отрицательной теплоемкости звезды, если не делать попыток определить ее численное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б. Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971.
2. Ощепков С.А., Райков А.А. Гравитация, 1, 1995, в настоящем выпуске.
3. Саслау У. Гравитационная физика звездных и галактических систем, М., 1989.
4. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд, М., 1950.